

Devoir surveillé – Fonction exponentielle et fonction logarithme népérien — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(4 pts)

- a) Calculer $A = \ln 12 + \ln \frac{3}{4} - 2 \ln 3$.
- b) Écrire sous forme de fraction le nombre $B = e^{2 \ln 3 - \ln 2}$.
- c) Étudier le signe de $(1 - \ln x) e^{-x}$ sur $]0; +\infty[$.
- d) Résoudre l'inéquation $\ln(3 - x) \geq 0$ après avoir précisé l'ensemble sur lequel elle a un sens.

Exercice 2 – Qui a raison ?

(4 pts)

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant. a) Léa : « Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$. »

- a) Tom : « L'équation $\ln x + \ln(x - 2) = \ln 3$ a deux solutions : -1 et 3 . »
- b) Inès : « Pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$; donc, pour tout réel x , $e^x > x$. »
- c) Karim : « $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty$, car $\ln x$ tend vers $+\infty$. »

Exercice 3 – Une fonction en $\ln$ et son lien avec l'exponentielle

(6 pts)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x$. a) Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

- a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$.
- b) Dresser le tableau de variations de f en précisant la valeur exacte de son minimum.
- c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- d) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
- e) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 3$ (valeurs exactes).

Exercice 4 – Problème — Le refroidissement d'un café

(6 pts)

Un café est servi à 90°C dans une pièce à 20°C . Sa température, en $^\circ \text{C}$, t minutes après le service, est modélisée par $T(t) = 20 + 70 e^{-0,05t}$ pour $t \geq 0$. a) Vérifier que $T(0) = 90$ et calculer $T(10)$, arrondi au dixième.

- a) Calculer $T'(t)$ et en déduire le sens de variation de T sur $[0; +\infty[$.
- b) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$ et interpréter ce résultat.
- c) On estime qu'un café se boit agréablement à 50°C au plus. Au bout de combien de temps cette température est-elle atteinte ? Donner la valeur exacte, puis une valeur arrondie à la seconde.
- d) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $T'(t) = -0,05(T(t) - 20)$, et interpréter cette égalité.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).