

Corrigé et barème – Fonction exponentielle et fonction logarithme népérien — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(4 pts)

- a) $\ln 12 + \ln \frac{3}{4} = \ln \left(12 \times \frac{3}{4} \right) = \ln 9$ et $2 \ln 3 = \ln 9$, donc $A = \ln 9 - \ln 9 = 0$. (1 pt) (1)
- b) $B = \frac{e^{2 \ln 3}}{e^{\ln 2}} = \frac{(e^{\ln 3})^2}{2} = \frac{9}{2}$. (1 pt) (1)
- c) $e^{-x} > 0$, donc le signe est celui de $1 - \ln x$; $1 - \ln x > 0 \iff \ln x < 1 \iff x < e$. L'expression est strictement positive sur $]0 ; e[$, nulle en e , strictement négative sur $]e ; +\infty[$. (1 pt) (1)
- d) Sens si $3 - x > 0$, soit $x < 3$. Alors $\ln(3 - x) \geq 0 = \ln 1 \iff 3 - x \geq 1 \iff x \leq 2$. Comme $x \leq 2$ entraîne $x < 3$: $\mathcal{S} =]-\infty ; 2]$. (1 pt) (1)

Méthode — Un produit contenant e^{-x} a toujours le signe de l'autre facteur, puisqu'une exponentielle est strictement positive : on n'écrit même pas sa ligne dans le tableau de signes.

Exercice 2 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Faux. Contre-exemple : $a = b = 1$ donne $\ln 2 \neq 0 = \ln 1 + \ln 1$. La propriété exacte est $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. (1 pt) (1)
- b) Faux. L'équation n'a de sens que si $x > 0$ et $x - 2 > 0$, soit $x > 2$. Alors $\ln(x(x - 2)) = \ln 3 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff (x + 1)(x - 3) = 0$. La valeur -1 ne vérifie pas $x > 2$: seule 3 convient, $\mathcal{S} = \{3\}$. (1 pt) (1)
- c) Vrai. Pour tout réel x , $x + 1 > x$, donc $e^x \geq x + 1 > x$: l'inégalité stricte $e^x > x$ est bien établie. (1 pt) (1)
- d) Faux. Le dénominateur tend aussi vers $+\infty$: forme indéterminée. On pose $X = \sqrt{x}$; alors $\ln x = \ln(X^2) = 2 \ln X$ et $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 2 \frac{\ln X}{X}$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow +\infty$ et $\frac{\ln X}{X} \rightarrow 0$ (croissances comparées) : la limite vaut 0. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — Résoudre l'équation « combinée » sans avoir écrit l'ensemble de définition de départ fait apparaître des solutions parasites, comme -1 ici.

Exercice 3 – Une fonction en ln et son lien avec l'exponentielle**(6 pts)**

- a) On pose $X = \ln x : f(x) = X^2 - 2X = X(X - 2)$. En 0^+ , $X \rightarrow -\infty$ et $X - 2 \rightarrow -\infty$, donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. En $+\infty$, $X \rightarrow +\infty$ et $X - 2 \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. (1 pt) (1)
- b) $(\ln x)^2$ est de la forme u^2 , de dérivée $2u'u = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$. Donc $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$. (1 pt) (1)
- c) Sur $]0; +\infty[$, $\frac{2}{x} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $\ln x - 1$, négatif sur $]0; e[$, nul en e , positif sur $]e; +\infty[$. f décroît de $+\infty$ à $f(e) = 1 - 2 = -1$, puis croît vers $+\infty$. Minimum : -1 , atteint en $x = e$. (1 pt) (1)
- d) $f(x) = 0 \iff \ln x(\ln x - 2) = 0 \iff \ln x = 0$ ou $\ln x = 2 \iff x = 1$ ou $x = e^2$. $\mathcal{S} = \{1; e^2\}$. (1 pt) (1)
- e) $f(1) = 0 - 0 = 0$ et $f'(1) = \frac{2(0 - 1)}{1} = -2$. Tangente : $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -2(x - 1)$, soit $y = -2x + 2$. (1 pt) (1)
- f) Avec $X = \ln x : X^2 - 2X - 3 \leq 0$. $\Delta = 4 + 12 = 16$, racines $\frac{2 \pm 4}{2}$, soit -1 et 3 ; le trinôme (coefficient $1 > 0$) est négatif entre ses racines : $-1 \leq \ln x \leq 3 \iff e^{-1} \leq x \leq e^3$ (exp strictement croissante). $\mathcal{S} = [e^{-1}; e^3]$. (1 pt) (1)

Astuce — Quand une expression ne dépend de x qu'à travers $\ln x$, le changement de variable $X = \ln x$ la ramène à un polynôme ; on revient à x en appliquant l'exponentielle.

Exercice 4 – Problème — Le refroidissement d'un café**(6 pts)**

- a) $T(0) = 20 + 70 e^0 = 20 + 70 = 90$ (0,5 pt). $T(10) = 20 + 70 e^{-0,5} \approx 20 + 70 \times 0,6065 \approx 62,5$ °C. (0,5 pt) (1,2)
- b) $T'(t) = 70 \times (-0,05) e^{-0,05t} = -3,5 e^{-0,05t}$ (0,5 pt). Une exponentielle est strictement positive, donc $T'(t) < 0$: T est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ (le café refroidit). (0,5 pt) (1,2)
- c) $-0,05t \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 20$ (0,5 pt). À long terme, la température du café se rapproche de celle de la pièce. (0,5 pt) (1,2)
- d) $T(t) \leq 50 \iff 70 e^{-0,05t} \leq 30 \iff e^{-0,05t} \leq \frac{3}{7} \iff -0,05t \leq \ln \frac{3}{7}$ (ln strictement croissante)
 $\iff t \geq -20 \ln \frac{3}{7} = 20 \ln \frac{7}{3}$ (on divise par $-0,05 < 0$, l'inégalité change de sens) (1 pt). $20 \ln \frac{7}{3} \approx 16,946$ min, soit environ 16 min 57 s. (0,5 pt) (1,2)
- e) $T(t) - 20 = 70 e^{-0,05t}$, donc $-0,05(T(t) - 20) = -3,5 e^{-0,05t} = T'(t)$ (1 pt). La vitesse de refroidissement est proportionnelle à l'écart entre la température du café et celle de la pièce : plus le café est chaud, plus il refroidit vite. (0,5 pt) (1,2)

Piège — En divisant une inégalité par le nombre négatif $-0,05$, on change son sens : c'est l'oubli le plus coûteux dans les problèmes de seuil.