

Corrigé et barème – Fonction exponentielle et fonction logarithme népérien — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(4 pts)

- a) $\frac{e^{2x+3}}{e^{x-1}} = e^{(2x+3)-(x-1)} = e^{x+4}$. (1 pt) (1)
- b) $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$, donc $\ln 72 = \ln(2^3) + \ln(3^2) = 3 \ln 2 + 2 \ln 3$. (1 pt) (1)
- c) $\ln(e^4) = 4$ et $e^{\ln 5} = 5$ (fonctions réciproques), donc la somme vaut $4 + 5 = 9$. (1 pt) (1)
- d) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln(e^{-2}) = -2$ et $\ln \sqrt{e} = \ln(e^{1/2}) = \frac{1}{2}$, donc le résultat est $-2 - 2 \times \frac{1}{2} = -3$. (1 pt) (1)

Méthode — Pour simplifier un logarithme, on décompose d'abord le nombre en produit de puissances de nombres premiers, puis on applique $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln(a^n) = n \ln a$.

Exercice 2 – Équations et inéquations

(5 pts)

- a) $e^{3x-1} = 4 \iff 3x - 1 = \ln 4 \iff x = \frac{1 + \ln 4}{3} = \frac{1 + 2 \ln 2}{3} \approx 0,80$. (1 pt) (1)
- b) L'équation a un sens si $2x - 1 > 0$, soit $x > \frac{1}{2}$. Alors $\ln(2x - 1) = 3 \iff 2x - 1 = e^3 \iff x = \frac{1 + e^3}{2} \approx 10,54$, qui vérifie bien $x > \frac{1}{2}$. $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1 + e^3}{2} \right\}$. (1 pt) (1)
- c) La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$: $e^{-x} < \frac{1}{8} \iff -x < \ln \frac{1}{8} = -3 \ln 2 \iff x > 3 \ln 2$. $\mathcal{S} =]3 \ln 2; +\infty[$. (1 pt) (1)
- d) La fonction $\exp$ est strictement croissante : pour $x > 0$, $\ln x \leq 2 \iff x \leq e^2$. $\mathcal{S} =]0; e^2]$. (1 pt) (1)
- e) Avec $X = e^x > 0$: $X^2 - 3X + 2 = 0$, $\Delta = 9 - 8 = 1$, $X = \frac{3 \pm 1}{2}$, soit $X = 1$ ou $X = 2$ (tous deux strictement positifs). $e^x = 1 \iff x = 0$ et $e^x = 2 \iff x = \ln 2$. $\mathcal{S} = \{0; \ln 2\}$. (1 pt) (1)

Piège — Avant de résoudre une équation avec $\ln$, on écrit la condition d'existence ($2x - 1 > 0$ ici) et on vérifie à la fin que la solution trouvée la respecte.

Exercice 3 – Dérivées et limites

(5 pts)

- a) $f = e^u$ avec $u(x) = x^2 - 3x$, $u'(x) = 2x - 3$: $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = (2x - 3)e^{x^2-3x}$. (1 pt) (1)
- b) Dérivée d'un produit : $g'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$. (1 pt) (1)
- c) $h = \ln u$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$: $h'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2 + 1}$. (1 pt) (1)
- d) Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout entier n ; avec $n = 3$, la limite vaut $+\infty$. (1 pt) (1)
- e) Forme indéterminée « $\infty - \infty$ » : on factorise, $x - \ln x = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)$. Par croissances comparées $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, donc la parenthèse tend vers 1 et, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = +\infty$. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — La dérivée de e^u est $u'e^u$ et non $e^{u'}$: on garde l'exponentielle intacte et on multiplie par la dérivée de l'exposant.

Exercice 4 – Étude d’une fonction**(6 pts)**

- a) e est une constante, donc $f'(x) = e^x - e$. (1 pt) (1,2)
- b) $f'(x) > 0 \iff e^x > e \iff x > \ln e = 1$ (la fonction $\ln$ est strictement croissante). De même $f'(x) < 0 \iff x < 1$ et $f'(1) = 0$. (1 pt) (1,2)
- c) En $-\infty : e^x \rightarrow 0$ et $-e x \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ (0,5 pt). En $+\infty$: forme indéterminée ;
 $f(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - e \right)$ et $\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$ (croissances comparées), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (1 pt). (1,2)
- d) f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 1]$, strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$; tableau : $+\infty$ en $-\infty$, minimum $f(1) = e - e = 0$ en $x = 1$, puis $+\infty$ en $+\infty$. (1,5 pt) (1,2)
- e) Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 0, donc $f(x) \geq 0$, c'est-à-dire $e^x \geq e x$ pour tout réel x . En divisant par $e > 0 : \frac{e^x}{e} = e^{x-1} \geq x$. (1 pt) (1,2)

Astuce — Pour démontrer une inégalité $A(x) \geq B(x)$, on étudie la différence $A(x) - B(x)$: si son minimum vaut 0, l'inégalité est prouvée d'un seul coup pour tout x .

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).