

Devoir surveillé – Dérivation des fonctions composées et convexité — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) Calculer la dérivée de $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$.
- b) Calculer la dérivée de $g(x) = \sqrt{e^{2x} + 1}$ sur $\mathbb{R}$ et la simplifier.
- c) Calculer la dérivée de $h(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^3$ sur $] -1; +\infty[$ et l'écrire sous forme d'un seul quotient.

Exercice 2 – Démontrer : exponentielle d'une fonction convexe

(4 pts)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $g = e^f$. a) Montrer que, pour tout $x \in I$, $g''(x) = (f''(x) + f'(x)^2) e^{f(x)}$.

- a) En déduire que si f est convexe sur I , alors g est convexe sur I .
- b) La réciproque est fausse : démontrer que $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ est convexe sur $[1; +\infty[$, alors que la fonction racine carrée y est concave.
- c) Application : démontrer que, pour tout réel x , $e^{x^2} \geq e(2x - 1)$.

Exercice 3 – Problème — Propagation d'une population

(5 pts)

Le nombre de bactéries d'une culture, en milliers, est modélisé pour $t \geq 0$ (t en heures) par $P(t) =$

$\frac{12}{1 + e^{2-0,5t}}$. a) Démontrer que P est croissante sur $[0; +\infty[$ et que, pour tout $t \geq 0$, $0 \leq P(t) \leq 12$.

- a) Démontrer que, pour tout $t \geq 0$, $P'(t) = \frac{1}{24} P(t) (12 - P(t))$.
- b) En déduire une expression de $P''(t)$ en fonction de $P(t)$ et $P'(t)$, puis étudier la convexité de P sur $[0; +\infty[$.
- c) Interpréter le point d'inflexion : à quel instant la population croît-elle le plus vite, avec quelle vitesse, et combien de bactéries compte-t-elle alors ?
- d) Démontrer que $P(t) \geq 1,5t$ pour $t \in [0; 4]$ et $P(t) \leq 1,5t$ pour $t \geq 4$.

Exercice 4 – Pour aller plus loin — Une famille de courbes en cloche (4 pts)

Pour tout réel $a > 0$, on considère $f_a(x) = e^{-ax^2}$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_a$ sa courbe. a) Calculer $f'_a(x)$ et montrer que $f''_a(x) = 2a(2ax^2 - 1)e^{-ax^2}$.

- a) Étudier la convexité de f_a et montrer que $\mathcal{C}_a$ admet deux points d'inflexion, d'abscisses $-x_a$ et x_a avec $x_a = \frac{1}{\sqrt{2a}}$.
- b) Démontrer que, lorsque a décrit $]0; +\infty[$, tous les points d'inflexion des courbes $\mathcal{C}_a$ sont sur une même droite, que l'on précisera.
- c) Démontrer que la tangente à $\mathcal{C}_a$ au point d'inflexion d'abscisse x_a coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $2x_a$, quel que soit $a > 0$.

Exercice 5 – Qui a raison ? (4 pts)

Les fonctions considérées sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Vrai ou faux ? Justifier. a) « Si f et g sont convexes sur $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est convexe sur $\mathbb{R}$. »

- a) « Si f est convexe et croissante sur $\mathbb{R}$ et si g est convexe sur $\mathbb{R}$, alors $f \circ g$ est convexe sur $\mathbb{R}$. »
- b) « Une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante. »
- c) « La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est convexe sur $\mathbb{R}$. »

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).