

Corrigé et barème – Dérivation des fonctions composées et convexité — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) $f = e^u$ avec $u(x) = \sqrt{x}$, $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$: $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$. (1 pt) (1)
- b) $g = \sqrt{u}$ avec $u(x) = e^{2x} + 1 > 0$, $u'(x) = 2e^{2x}$: $g'(x) = \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x} + 1}} = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$. (1 pt) (1)
- c) $u(x) = \frac{x}{x+1}$, $u'(x) = \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$ (0,5 pt). $h'(x) = 3u'(x)u(x)^2 = 3 \times \frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{3x^2}{(x+1)^4}$ (0,5 pt). (1)

Piège — Dans une composée à deux étages comme $e^{\sqrt{x}}$, on multiplie par la dérivée de l'étage intérieur seulement : ici $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, et pas $e^{\sqrt{x}}$ une seconde fois.

Exercice 2 – Démontrer : exponentielle d'une fonction convexe

(4 pts)

- a) $g' = f'e^f$ (0,5 pt). En dérivant ce produit : $g'' = f''e^f + f' \times f'e^f = (f'' + f'^2)e^f$ (0,5 pt). (1)
- b) Si f est convexe, $f'' \geq 0$; comme $f'^2 \geq 0$ et $e^f > 0$, on a $g'' \geq 0$ sur I : g est convexe. (0,5 pt) (1)
- c) Avec $f(x) = \sqrt{x}$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$, donc f est concave (0,5 pt). $f''(x) + f'(x)^2 = \frac{1}{4x} - \frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{4x\sqrt{x}}$ (0,5 pt), positif pour $x \geq 1$: d'après a), $(e^{\sqrt{x}})'' \geq 0$ sur $[1; +\infty[$, la fonction est convexe alors que $\sqrt{\cdot}$ ne l'est pas (0,5 pt). (1)
- d) $x \mapsto x^2$ est convexe, donc $G(x) = e^{x^2}$ est convexe sur $\mathbb{R}$ d'après b) (0,5 pt). $G(1) = e$, $G'(x) = 2xe^{x^2}$, $G'(1) = 2e$: tangente en 1 d'équation $y = 2e(x-1) + e = e(2x-1)$; la courbe est au-dessus, d'où $e^{x^2} \geq e(2x-1)$ (0,5 pt). (1)

Méthode — Pour réfuter une implication générale, un seul contre-exemple suffit, mais il faut le vérifier par un calcul complet, pas sur un dessin.

Exercice 3 – Problème — Propagation d'une population

(5 pts)

- a) Posons $D(t) = 1 + e^{2-0,5t}$, $D'(t) = -0,5e^{2-0,5t}$. $P = \frac{12}{D}$ donne $P'(t) = -\frac{12D'(t)}{D(t)^2} = \frac{6e^{2-0,5t}}{(1 + e^{2-0,5t})^2} > 0$: P est croissante (0,5 pt). $D(t) > 1$, donc $0 < \frac{12}{D(t)} < 12$ (0,5 pt). (1)
- b) $12 - P = \frac{12D-12}{D} = \frac{12e^{2-0,5t}}{D}$ (0,5 pt), donc $\frac{1}{24}P(12 - P) = \frac{1}{24} \times \frac{12}{D} \times \frac{12e^{2-0,5t}}{D} = \frac{6e^{2-0,5t}}{D^2} = P'(t)$ (0,5 pt). (1)
- c) $P' = \frac{1}{24}(12P - P^2)$, donc $P'' = \frac{1}{24}(12P' - 2PP') = \frac{1}{12}P'(t)(6 - P(t))$ (0,5 pt). Comme $P' > 0$, P'' a le signe de $6 - P$. Or $P(t) < 6 \iff D(t) > 2 \iff e^{2-0,5t} > 1 \iff 2 - 0,5t > 0 \iff t < 4$ (0,5 pt). P est convexe sur $[0; 4]$ et concave sur $[4; +\infty[$ (0,5 pt). (1)
- d) P'' change de signe en 4 : P' est croissante sur $[0; 4]$ puis décroissante, donc maximale en $t = 4$ (0,5 pt). $P(4) = \frac{12}{2} = 6$ et $P'(4) = \frac{6 \times 1}{2^2} = 1,5$: au bout de 4 h, la culture compte 6 000 bactéries et croît le plus vite, à 1 500 bactéries par heure (0,5 pt). (1)
- e) La tangente au point d'inflexion a pour équation $y = 1,5(t - 4) + 6 = 1,5t$. Sur $[0; 4]$, P convexe : courbe au-dessus de la tangente, $P(t) \geq 1,5t$; sur $[4; +\infty[$, P concave : courbe au-dessous, $P(t) \leq 1,5t$. (0,5 pt) (1)

Astuce — Exprimer P' en fonction de P évite de redériver un quotient compliqué : P'' s'obtient en dérivant la relation, puis son signe se lit sur $6 - P$.

Exercice 4 – Pour aller plus loin — Une famille de courbes en cloche

(4 pts)

- a) $f'_a(x) = -2ax e^{-ax^2}$ (0,5 pt). $f''_a(x) = -2a e^{-ax^2} + (-2ax)(-2ax)e^{-ax^2} = (4a^2x^2 - 2a) e^{-ax^2} = 2a(2ax^2 - 1)e^{-ax^2}$ (0,5 pt). (1)
- b) $2a > 0$ et $e^{-ax^2} > 0$: f''_a a le signe de $2ax^2 - 1$, nul pour $x^2 = \frac{1}{2a}$, soit $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2a}}$ (0,5 pt). f_a est convexe sur $] -\infty; -x_a]$ et sur $[x_a; +\infty[$, concave sur $[-x_a; x_a]$; f''_a change de signe en $\pm x_a$: deux points d'inflexion (0,5 pt). (1)
- c) $f_a(\pm x_a) = e^{-a \times \frac{1}{2a}} = e^{-\frac{1}{2}}$ (0,5 pt), indépendant de a : tous les points d'inflexion sont sur la droite horizontale d'équation $y = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ (0,5 pt). (1)
- d) $f'_a(x_a) = -2a \times \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{2a} e^{-\frac{1}{2}}$; tangente : $y = e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{2a} e^{-\frac{1}{2}}(x - x_a)$ (0,5 pt). $y = 0 \iff \sqrt{2a}(x - x_a) = 1 \iff x - x_a = \frac{1}{\sqrt{2a}} = x_a \iff x = 2x_a$ (0,5 pt). (1)

Piège — Avec un paramètre, garder a littéral jusqu'au bout : une propriété vraie « quel que soit a » se lit sur un résultat qui ne dépend plus de a .

Exercice 5 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Faux (0,5 pt). Contre-exemple : $f(x) = x^2$ et $g(x) = e^{-x}$ sont convexes, mais $g \circ f(x) = e^{-x^2}$ a pour dérivée seconde $(4x^2 - 2)e^{-x^2}$, qui vaut $-2 < 0$ en 0 : elle n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$ (0,5 pt). (1)
- b) Vrai (0,5 pt). $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$ et $(f \circ g)'' = g'' \times (f' \circ g) + g'^2 \times (f'' \circ g)$; or $g'' \geq 0$, $f' \geq 0$ (f croissante) et $f'' \geq 0$, donc $(f \circ g)'' \geq 0$ (0,5 pt). (1)
- c) Vrai (0,5 pt). Si $f'(a) \neq 0$ pour un réel a , la courbe est au-dessus de sa tangente en a : $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$, qui tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ (si $f'(a) > 0$) ou $x \rightarrow -\infty$ (si $f'(a) < 0$), ce qui contredit « f majorée ». Donc $f' = 0$ sur $\mathbb{R}$ et f est constante (0,5 pt). (1)
- d) Vrai (0,5 pt). $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$ (0,5 pt). (1)

Erreur fréquente — Croire que « convexe composée avec convexe donne convexe » : il faut en plus que la fonction extérieure soit croissante, sinon le terme $g'' \times (f' \circ g)$ peut être négatif.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).