

Devoir surveillé – Dérivation des fonctions composées et convexité — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) Calculer la dérivée de $f_1(x) = \frac{1}{(3x-2)^2}$ sur $] \frac{2}{3}; +\infty[$.
- b) Justifier que $f_2(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f_2'(x)$.
- c) Calculer la dérivée de $f_3(x) = x e^{-3x}$ sur $\mathbb{R}$ et la factoriser.

Exercice 2 – Encadrer une racine carrée

(4 pts)

Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe. a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x > -1$.

- a) En déduire la convexité de f sur $] -1; +\infty[$.
- b) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 et en déduire que, pour tout $x > -1$, $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.
- c) On note $A(0; 1)$ et $B(3; 2)$. Déterminer une équation de la droite (AB) et en déduire que, pour tout $x \in [0; 3]$, $\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{3}$.
- d) En déduire un encadrement de $\sqrt{1,03}$ sans calculatrice, puis le contrôler à la calculatrice.

Exercice 3 – Étude complète

(5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-\frac{x}{2}}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe. a) Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = -\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$.

- a) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (sans les limites) et préciser son extremum.
- b) Montrer que $f''(x) = \frac{x-2}{4}e^{-\frac{x}{2}}$, puis étudier la convexité de f .
- c) Justifier que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion I , donner ses coordonnées, puis une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en I .
- d) Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 – Problème — Concentration d'un médicament**(5 pts)**

Après l'absorption d'un comprimé, la concentration d'un médicament dans le sang (en mg/L) est modélisée, pour $t \in [0; 12]$ (t en heures), par $C(t) = 8t e^{-\frac{t}{4}}$. a) Montrer que $C'(t) = (8 - 2t)e^{-\frac{t}{4}}$.

- a) Dresser le tableau de variations de C sur $[0; 12]$. Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale ? Donner cette concentration en valeur exacte puis arrondie au centième.
- b) Montrer que $C''(t) = \frac{t - 8}{2}e^{-\frac{t}{4}}$.
- c) Étudier la convexité de C sur $[0; 12]$ et donner les coordonnées du point d'inflexion de sa courbe (valeurs exactes puis arrondies au centième).
- d) La vitesse d'évolution de la concentration à l'instant t est $C'(t)$. À quel instant la concentration diminue-t-elle le plus vite ? Avec quelle vitesse ?

Exercice 5 – Démontrer**(3 pts)**

- a) Soit $h(x) = (x^2 - 1)^2$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $h'(x)$ puis $h''(x)$, et déterminer les points d'inflexion de la courbe de h (coordonnées exactes).
- b) Soit $\varphi(x) = e^{2x-1}$ sur $\mathbb{R}$. Démontrer que φ est convexe, puis que, pour tout réel x , $e^{2x-1} \geq 2x$.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).