

Corrigé et barème – Dérivation des fonctions composées et convexité — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) $f_1 = u^{-2}$ avec $u(x) = 3x - 2$, $u'(x) = 3$: $f'_1(x) = -2 \times 3 \times (3x - 2)^{-3} = -\frac{6}{(3x - 2)^3}$. (1 pt) (1)
- b) $x^2 + x + 1$ a pour discriminant $1 - 4 = -3 < 0$: il est strictement positif sur $\mathbb{R}$, donc f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (0,5 pt). $f'_2(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$ (0,5 pt). (1)
- c) Produit : $f'_3(x) = 1 \times e^{-3x} + x \times (-3e^{-3x}) = (1 - 3x)e^{-3x}$. (1 pt) (1)

Astuce — Écrire $\frac{1}{u^2} = u^{-2}$ permet d'appliquer directement la formule $(u^n)' = nu'u^{n-1}$, valable aussi pour n entier négatif.

Exercice 2 – Encadrer une racine carrée

(4 pts)

- a) $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = 1 + x$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ (0,5 pt). Alors $f''(x) = \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2})(1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$ (0,5 pt). (On peut aussi dériver $\frac{1}{2\sqrt{u}}$ comme un inverse.) (0,8)
- b) Pour $x > -1$, $(1+x)\sqrt{1+x} > 0$, donc $f''(x) < 0$: f est concave sur $] -1 ; +\infty[$. (0,5 pt) (0,8)
- c) $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{2}$: tangente $y = 1 + \frac{x}{2}$ (0,5 pt). f étant concave, $\mathcal{C}$ est au-dessous de ses tangentes : $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$ pour tout $x > -1$ (0,5 pt). (0,8)
- d) Coefficient directeur $\frac{2-1}{3-0} = \frac{1}{3}$, ordonnée à l'origine 1 : $(AB) : y = 1 + \frac{x}{3}$ (0,5 pt). A et B sont sur $\mathcal{C}$ ($\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$) ; f concave sur $[0 ; 3]$, donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de la corde $[AB]$: $\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{3}$ sur $[0 ; 3]$ (0,5 pt). (0,8)
- e) Avec $x = 0,03 \in [0 ; 3]$: $1 + 0,01 \leq \sqrt{1,03} \leq 1 + 0,015$, soit $1,01 \leq \sqrt{1,03} \leq 1,015$; la calculatrice donne $\sqrt{1,03} \approx 1,0149$, cohérent. (0,5 pt) (0,8)

Méthode — Une fonction concave est au-dessous de ses tangentes et au-dessus de ses cordes : tangente et corde fournissent ensemble un encadrement.

Exercice 3 – Étude complète

(5 pts)

- a) La dérivée de $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$ est $-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$ (0,5 pt). Produit : $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + (x+2)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2} - 1\right)e^{-\frac{x}{2}} = -\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$ (0,5 pt). (1)
- b) L'exponentielle est strictement positive, donc $f'(x)$ a le signe de $-x$: $f' > 0$ sur $] -\infty ; 0[$, $f' < 0$ sur $]0 ; +\infty[$ (0,5 pt). f est croissante sur $] -\infty ; 0]$, décroissante sur $[0 ; +\infty[$, maximum $f(0) = 2$ (0,5 pt). (1)
- c) $f'(x) = -\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$; $f''(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \left(-\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x-2}{4}e^{-\frac{x}{2}}$ (1 pt). f'' a le signe de $x-2$: f concave sur $] -\infty ; 2]$, convexe sur $[2 ; +\infty[$ (0,5 pt). (1)
- d) f'' s'annule en changeant de signe uniquement en 2 : un seul point d'inflexion, $I\left(2 ; \frac{4}{e}\right)$ car $f(2) = 4e^{-1}$ (0,5 pt). $f'(2) = -e^{-1}$, donc $T : y = -\frac{1}{e}(x-2) + \frac{4}{e}$, soit $y = \frac{6-x}{e}$ (0,5 pt). (1)
- e) Sur $] -\infty ; 2]$, f est concave : $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de T ; sur $[2 ; +\infty[$, f est convexe : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T . La courbe traverse sa tangente en I . (0,5 pt) (1)

Erreur fréquente — Dérivée $e^{-\frac{x}{2}}$ en $e^{-\frac{x}{2}}$: le facteur $-\frac{1}{2}$ de $g(ax+b)$, avec $(g(ax+b))' = a g'(ax+b)$, est souvent oublié.

Exercice 4 – Problème — Concentration d'un médicament

(5 pts)

- a) $C'(t) = 8e^{-\frac{t}{4}} + 8t \times \left(-\frac{1}{4}\right)e^{-\frac{t}{4}}$ (0,5 pt) $= (8-2t)e^{-\frac{t}{4}}$ (0,5 pt). (1)
- b) $C'(t)$ a le signe de $8-2t$: C croissante sur $[0 ; 4]$, décroissante sur $[4 ; 12]$; $C(0) = 0$, $C(12) = 96e^{-3} \approx 4,78$ (0,5 pt). Maximum au bout de 4 h : $C(4) = 32e^{-1} \approx 11,77$ mg/L (0,5 pt). (1)
- c) $C''(t) = -2e^{-\frac{t}{4}} + (8-2t)\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-\frac{t}{4}}$ (0,5 pt) $= \left(-2-2+\frac{t}{2}\right)e^{-\frac{t}{4}} = \frac{t-8}{2}e^{-\frac{t}{4}}$ (0,5 pt). (1)
- d) C'' a le signe de $t-8$: C concave sur $[0 ; 8]$, convexe sur $[8 ; 12]$ (0,5 pt). C'' s'annule en changeant de signe en 8 : point d'inflexion $(8 ; 64e^{-2})$, soit environ $(8 ; 8,66)$ (0,5 pt). (1)
- e) C'' est la dérivée de C' : C' décroît sur $[0 ; 8]$ et croît sur $[8 ; 12]$, donc C' est minimale en $t = 8$ (0,5 pt). $C'(8) = -8e^{-2} \approx -1,08$: c'est au bout de 8 h que la concentration diminue le plus vite, d'environ 1,08 mg/L par heure (0,5 pt). (1)

Méthode — Au point d'inflexion, f' atteint un extremum : en contexte, c'est l'instant où la grandeur varie le plus vite (hausse ou baisse).

Exercice 5 – Démontrer

(3 pts)

- a) $h'(x) = 2 \times 2x \times (x^2 - 1) = 4x^3 - 4x$ (0,5 pt) ; $h''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1)$, qui s'annule en $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, positive à l'extérieur des racines et négative entre elles (0,5 pt). h'' change de signe en ces deux valeurs : deux points d'inflexion, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{4}{9}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{4}{9}\right)$ car $\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 = \frac{4}{9}$ (0,5 pt). (1,5)
- b) $\varphi'(x) = 2e^{2x-1}$, $\varphi''(x) = 4e^{2x-1} > 0$: φ est convexe sur $\mathbb{R}$ (0,5 pt). En $\frac{1}{2}$: $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = e^0 = 1$ et $\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, tangente $y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 = 2x$ (0,5 pt). La courbe d'une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes : $e^{2x-1} \geq 2x$ pour tout réel x (0,5 pt). (1,5)

Astuce — Pour prouver $f(x) \geq ax + b$ avec f convexe, cherche le point où la droite $y = ax + b$ est tangente à la courbe : l'inégalité devient immédiate.