

Devoir surveillé – Dérivation des fonctions composées et convexité — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(5 pts)

- a) Calculer la dérivée de $f(x) = (3x + 1)^4$ sur $\mathbb{R}$.
- b) Calculer la dérivée de $g(x) = \sqrt{2x + 6}$ sur $] -3 ; +\infty[$.
- c) Calculer la dérivée de $h(x) = e^{-2x+5}$ sur $\mathbb{R}$.
- d) Calculer la dérivée de $k(x) = e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
- e) Préciser si chacune des fonctions suivantes est convexe ou concave : la fonction carré sur $\mathbb{R}$, la fonction racine carrée sur $[0 ; +\infty[$, la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 – Un point d'inflexion

(5 pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)^3 - 6x$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. a) Calculer $f'(x)$.

- a) Montrer que $f''(x) = 24(2x - 1)$.
- b) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
- c) Justifier que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion A et donner ses coordonnées.
- d) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en A , puis vérifier que $f(x) - (-6x) = (2x - 1)^3$ et en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T .

Exercice 3 – Variations et convexité d'une exponentielle composée

(5 pts)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{x^2-4x}$. a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

- a) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$ (sans les limites) et préciser son minimum.
- b) Montrer que, pour tout réel x , $g''(x) = ((2x - 4)^2 + 2) e^{x^2-4x}$.
- c) En déduire la convexité de g , puis démontrer que, pour tout réel x , $e^{x^2-4x} \geq 1 - 4x$.

Exercice 4 – Qui a raison ?

(5 pts)

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant. a) « La dérivée de $x \mapsto (x^2 + 1)^3$ est $x \mapsto 3(x^2 + 1)^2$. »

- a) « La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est convexe sur $\mathbb{R}$. »
- b) « La courbe de $x \mapsto x^4 - 2x$ admet un point d'inflexion d'abscisse 0. »
- c) « Pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$. »
- d) « Si f est dérivable sur un intervalle I et si f' est décroissante sur I , alors f est concave sur I . »

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).