

Corrigé et barème – Dérivation des fonctions composées et convexité — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(5 pts)

- a) $f = u^4$ avec $u(x) = 3x + 1$, $u'(x) = 3$: $f'(x) = 4 \times 3 \times (3x + 1)^3 = 12(3x + 1)^3$. (1 pt) (1)
- b) $g = \sqrt{u}$ avec $u(x) = 2x + 6 > 0$ sur $] -3 ; +\infty[$ et $u'(x) = 2$: $g'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+6}} = \frac{1}{\sqrt{2x+6}}$. (1 pt) (1)
- c) $h = e^u$ avec $u(x) = -2x + 5$, $u'(x) = -2$: $h'(x) = -2e^{-2x+5}$. (1 pt) (1)
- d) $k = e^u$ avec $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$: $k'(x) = 2xe^{x^2}$. (1 pt) (1)
- e) Fonction carré : dérivée seconde $2 > 0$, convexe sur $\mathbb{R}$ (0,5 pt). Racine carrée : concave sur $[0 ; +\infty[$; exponentielle : $(e^x)'' = e^x > 0$, convexe sur $\mathbb{R}$ (0,5 pt). (1)

Erreur fréquente — Oublier le facteur u' : la dérivée de e^{x^2} n'est pas e^{x^2} , et celle de $(3x + 1)^4$ n'est pas $4(3x + 1)^3$.

Exercice 2 – Un point d'inflexion

(5 pts)

- a) $(2x - 1)^3$ est de la forme u^3 avec $u'(x) = 2$: sa dérivée est $3 \times 2 \times (2x - 1)^2$. Donc $f'(x) = 6(2x - 1)^2 - 6$. (1 pt) (1)
- b) La dérivée de $6(2x - 1)^2$ est $6 \times 2 \times 2 \times (2x - 1) = 24(2x - 1)$; la constante -6 a pour dérivée 0. Donc $f''(x) = 24(2x - 1)$. (1 pt) (1)
- c) $f''(x) \leq 0 \iff x \leq \frac{1}{2}$: f est concave sur $] -\infty ; \frac{1}{2}]$ (0,5 pt) et convexe sur $[\frac{1}{2} ; +\infty[$ (0,5 pt). (1)
- d) f'' s'annule en $\frac{1}{2}$ en changeant de signe, donc $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse $\frac{1}{2}$ (0,5 pt). $f(\frac{1}{2}) = 0^3 - 3 = -3$: $A(\frac{1}{2} ; -3)$ (0,5 pt). (1)
- e) $f'(\frac{1}{2}) = 0 - 6 = -6$, donc $T : y = -6(x - \frac{1}{2}) - 3$, soit $y = -6x$ (0,5 pt). $f(x) + 6x = (2x - 1)^3$, positif si $x \geq \frac{1}{2}$ et négatif si $x \leq \frac{1}{2}$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de T sur $] -\infty ; \frac{1}{2}]$ et au-dessus sur $[\frac{1}{2} ; +\infty[$; elle traverse sa tangente en A , ce qui est cohérent avec la concavité puis la convexité (0,5 pt). (1)

Méthode — Pour un point d'inflexion, il ne suffit pas que f'' s'annule : il faut qu'elle change de signe. Le tableau de signes de f'' est donc indispensable.

Exercice 3 – Variations et convexité d'une exponentielle composée

(5 pts)

- a) $u(x) = x^2 - 4x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme), donc $g = e^u$ aussi (0,5 pt), et $g'(x) = u'(x)e^{u(x)} = (2x - 4)e^{x^2-4x}$ (0,5 pt). (1,25)
- b) $e^{x^2-4x} > 0$, donc $g'(x)$ a le signe de $2x - 4$: négatif sur $] -\infty ; 2[$, positif sur $]2 ; +\infty[$ (0,5 pt). g est décroissante sur $] -\infty ; 2]$, croissante sur $[2 ; +\infty[$ (0,5 pt). Minimum : $g(2) = e^{4-8} = e^{-4}$ (0,5 pt). (1,25)
- c) $g' = v \times e^u$ avec $v(x) = 2x - 4$, $v'(x) = 2$ et $(e^u)' = (2x - 4)e^u$ (0,5 pt). Donc $g''(x) = 2e^{x^2-4x} + (2x - 4)(2x - 4)e^{x^2-4x}$ (0,5 pt) $= ((2x - 4)^2 + 2)e^{x^2-4x}$ (0,5 pt). (1,25)
- d) $(2x - 4)^2 + 2 \geq 2 > 0$ et l'exponentielle est strictement positive : $g''(x) > 0$, g est convexe sur $\mathbb{R}$ (0,5 pt). Tangente en 0 : $g(0) = 1$, $g'(0) = -4$, d'où $y = -4x + 1$; une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes, donc $e^{x^2-4x} \geq 1 - 4x$ pour tout réel x (0,5 pt). (1,25)

Astuce — Comme $e^u > 0$, la dérivée $u'e^u$ a toujours le signe de u' : les variations de e^u sont celles de u .

Exercice 4 – Qui a raison ?**(5 pts)**

- a) Faux (0,5 pt) : avec $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$, la dérivée est $3 \times 2x \times (x^2 + 1)^2 = 6x(x^2 + 1)^2$ (0,5 pt). (1)
- b) Vrai (0,5 pt) : sa dérivée est $-e^{-x}$ et sa dérivée seconde $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ (0,5 pt). (1)
- c) Faux (0,5 pt) : la dérivée seconde est $12x^2$, qui s'annule en 0 mais reste positive : elle ne change pas de signe, la fonction est convexe sur $\mathbb{R}$ et il n'y a pas d'inflexion (0,5 pt). (1)
- d) Vrai (0,5 pt) : l'exponentielle est convexe, donc sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = e^0(x - 0) + e^0 = x + 1$ (0,5 pt). (1)
- e) Vrai (0,5 pt) : c'est la caractérisation de la concavité d'une fonction dérivable : f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I (0,5 pt). (1)

Piège — $f''(a) = 0$ ne garantit pas un point d'inflexion : $x \mapsto x^4 - 2x$ a une dérivée seconde nulle en 0 sans changement de signe.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).