

Devoir surveillé – Dénombrement, loi binomiale et sommes de variables aléatoires — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Démontrer

(4 pts)

- a) Démontrer que, pour tous entiers n et k tels que $1 \leq k \leq n$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- b) Retrouver cette égalité par un argument de dénombrement, en comptant de deux façons les comités de k personnes choisies parmi n dont l'une est désignée présidente.
- c) Soit X une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}(n; p)$, avec $n \geq 1$. En utilisant a) et la formule du binôme, démontrer que $E(X) = np$.
- d) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{10} k \binom{10}{k}$.

Exercice 2 – Une marche au hasard

(4 pts)

- a) Un pion part de l'abscisse 0 sur une droite graduée. À chaque seconde, il avance d'une unité avec la probabilité p (\$0\$).
- b) Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$ en fonction de p . Pour quelle valeur de p la variance de Z est-elle maximale ?
- c) On suppose $p = \frac{1}{2}$. Calculer la probabilité que le pion soit revenu à l'origine à l'instant 10, puis celle qu'il soit à l'abscisse 4. Peut-il être à l'abscisse 3 à l'instant 10 ?
- d) On revient au cas général et on note D_i le déplacement (+1 ou -1) effectué à la seconde i . Calculer $E(D_i)$ et $V(D_i)$, puis retrouver $V(Z)$ sans utiliser la loi de X .

Exercice 3 – Problème — Répondre au hasard ?

(5 pts)

- a) Un questionnaire comporte 20 questions ; chacune propose 4 réponses dont une seule est exacte. Une bonne réponse rapporte a points ($a > 0$) et une mauvaise en retire 1. Un candidat répond entièrement au hasard, de façon indépendante d'une question à l'autre ; on note X son nombre de bonnes réponses et N sa note. Exprimer N en fonction de X , puis déterminer a pour que l'espérance de N soit nulle.
- b) On prend désormais $a = 3$. Calculer $\sigma(N)$, arrondi au centième.
- c) Calculer la probabilité que ce candidat obtienne une note supérieure ou égale à 10, arrondie au millième.
- d) Un second candidat connaît avec certitude les réponses à 12 questions et répond au hasard aux 8 autres. On note Y son nombre de bonnes réponses parmi ces 8 questions. Exprimer sa note N' en fonction de Y , puis calculer $E(N')$ et $P(N' \geq 40)$, arrondie au millième.
- e) Ce second candidat pourrait aussi laisser sans réponse les 8 questions incertaines (une question sans réponse vaut 0 point). Comparer les deux stratégies et conclure.

Exercice 4 – Avec ou sans remise*(4 pts)*

- a) Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules blanches. On tire successivement et sans remise 3 boules et on note Y le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de Y .
- b) On effectue maintenant 3 tirages successifs avec remise dans la même urne ; X désigne le nombre de boules rouges obtenues. Donner la loi de X et comparer $P(X = 2)$ à $P(Y = 2)$.
- c) Calculer $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$.
- d) Dans le tirage sans remise, on écrit $Y = B_1 + B_2 + B_3$, où B_i vaut 1 si la i -ième boule tirée est rouge et 0 sinon. On admet que chaque B_i suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,4. Expliquer pourquoi $E(Y) = E(X)$ alors que $V(Y) \neq V(X)$.

Exercice 5 – Pour aller plus loin*(3 pts)*

- a) Soit X une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}(n; p)$, avec $n \geq 1$ et $0 < p < 1$.
- b) En déduire que la probabilité que X prenne une valeur paire vaut $\frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}$.
- c) Calculer cette probabilité pour $n = 10$ et $p = 0,3$ (valeur approchée à 10^{-5} près), puis déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$. Pour quelle valeur de p vaut-elle exactement $\frac{1}{2}$ pour tout n ?

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).