

Corrigé et barème – Dénombrement, loi binomiale et sommes de variables aléatoires — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Démontrer

(4 pts)

- a) $k \binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$ et $n \binom{n-1}{k-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$: les deux membres sont égaux. (1 pt) (1)
- b) Première façon : on choisit le comité, $\binom{n}{k}$ choix, puis son président parmi ses k membres : $k \binom{n}{k}$ possibilités (0,5 pt). Seconde façon : on choisit d'abord le président parmi les n personnes, puis les $k-1$ autres membres parmi les $n-1$ restantes : $n \binom{n-1}{k-1}$ possibilités. Les deux nombres comptent le même ensemble, d'où l'égalité (0,5 pt). (1)
- c) Avec $q = 1 - p$, $E(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, et le terme d'indice $k = 0$ est nul (0,5 pt). Par a), $E(X) = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{n-1-j}$ en posant $j = k-1$ (0,5 pt). Par la formule du binôme, cette somme vaut $(p+q)^{n-1} = 1$, donc $E(X) = np$ (0,5 pt). (1)
- d) Avec $n = 10$ et $p = q = \frac{1}{2}$: $E(X) = \frac{1}{2^{10}} \sum_{k=1}^{10} k \binom{10}{k} = 10 \times \frac{1}{2} = 5$, donc $\sum_{k=1}^{10} k \binom{10}{k} = 5 \times 1\,024 = 5\,120$. (0,5 pt) (1)

Méthode — Compter un même ensemble de deux façons est une démonstration à part entière : elle explique l'identité, là où le calcul avec les factorielles se contente de la vérifier.

Exercice 2 – Une marche au hasard

(4 pts)

- a) On répète 10 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « avancer », de probabilité p : X suit $\mathcal{B}(10; p)$ (0,5 pt). Le pion effectue X avancées et $10 - X$ reculs, donc $Z = X - (10 - X) = 2X - 10$ (0,5 pt). (1)
- b) $E(Z) = 2E(X) - 10 = 20p - 10$ et $V(Z) = 2^2 V(X) = 40p(1-p)$ (0,5 pt). Or $p(1-p) = \frac{1}{4} - (p - \frac{1}{2})^2$ est maximal pour $p = \frac{1}{2}$, où $V(Z) = 10$ (0,5 pt). (1)
- c) $Z = 0 \iff X = 5$, donc $P(Z = 0) = \frac{\binom{10}{5}}{2^{10}} = \frac{252}{1\,024} = \frac{63}{256} \approx 0,246$ (0,5 pt). $Z = 4 \iff X = 7$, donc $P(Z = 4) = \frac{\binom{10}{7}}{1\,024} = \frac{120}{1\,024} = \frac{15}{128} \approx 0,117$. Enfin $Z = 2X - 10$ est toujours pair : l'abscisse 3 est impossible (0,5 pt). (1)
- d) $E(D_i) = 1 \times p + (-1) \times (1-p) = 2p - 1$ et $V(D_i) = p(1 - (2p - 1))^2 + (1-p)(-1 - (2p - 1))^2 = 4p(1-p)^2 + 4p^2(1-p) = 4p(1-p)$ (0,5 pt). Comme $Z = D_1 + D_2 + \dots + D_{10}$ avec des D_i indépendantes, $V(Z) = 10 \times 4p(1-p) = 40p(1-p)$ (0,5 pt). (1)

Astuce — Un argument de parité peut rendre un événement impossible sans aucun calcul : ici $Z = 2X - 10$ est toujours pair, comme le nombre de pas effectués.

Exercice 3 – Problème — Répondre au hasard ?

(5 pts)

- a) X suit $\mathcal{B}(20; 0,25)$ et $N = aX - (20 - X) = (a + 1)X - 20$ (0,5 pt). $E(N) = (a + 1) \times 5 - 20$, donc $E(N) = 0 \iff a + 1 = 4 \iff a = 3$ (0,5 pt). (1)
- b) $N = 4X - 20$, donc $V(N) = 16V(X) = 16 \times 20 \times 0,25 \times 0,75 = 16 \times 3,75 = 60$ (0,5 pt) et $\sigma(N) = \sqrt{60} \approx 7,75$ (0,5 pt). (1)
- c) $N \geq 10 \iff 4X - 20 \geq 10 \iff X \geq 7,5 \iff X \geq 8$, car X est entier (0,5 pt). À la calculatrice, $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 1 - 0,8982 = 0,1018$, soit environ 0,102 (0,5 pt). (1)
- d) Y suit $\mathcal{B}(8; 0,25)$ et $N' = 3 \times 12 + 3Y - (8 - Y) = 28 + 4Y$, donc $E(N') = 28 + 4 \times 2 = 36$ (0,5 pt). $N' \geq 40 \iff 28 + 4Y \geq 40 \iff Y \geq 3$. Or $P(Y \leq 2) = 0,75^8 + 8 \times 0,25 \times 0,75^7 + 28 \times 0,25^2 \times 0,75^6 \approx 0,1001 + 0,2670 + 0,3115 = 0,6786$, donc $P(N' \geq 40) = 1 - P(Y \leq 2) \approx 0,321$ (0,5 pt). (1)
- e) Sans répondre, sa note vaut 36 à coup sûr ; en répondant au hasard, l'espérance est la même, 36 (0,5 pt). Mais la note fluctue : $\sigma(N') = 4\sigma(Y) = 4\sqrt{1,5} \approx 4,90$, avec $P(N' \geq 40) \approx 0,321$ mais aussi $P(N' < 36) = P(Y \leq 1) \approx 0,367$. Les deux stratégies se valent en moyenne : répondre au hasard est un pari sans gain moyen, qu'un candidat prudent évite et qu'un candidat visant une note élevée peut tenter (0,5 pt). (1)

Piège — Une inégalité sur la note se traduit sur X en tenant compte du fait que X est entier : $X \geq 7,5$ devient $X \geq 8$, et l'on calcule $1 - P(X \leq 7)$, pas $1 - P(X \leq 8)$.

Exercice 4 – Avec ou sans remise

(4 pts)

- a) L'ensemble des 3 boules obtenues est une partie à 3 éléments de l'urne, et ces $\binom{10}{3} = 120$ parties sont équiprobables (0,5 pt). $P(Y = 0) = \frac{\binom{6}{3}}{120} = \frac{20}{120}$, $P(Y = 1) = \frac{4 \times 15}{120} = \frac{60}{120}$, $P(Y = 2) = \frac{6 \times 6}{120} = \frac{36}{120}$ et $P(Y = 3) = \frac{4}{120}$; contrôle : $20 + 60 + 36 + 4 = 120$ (0,5 pt). (1)
- b) Avec remise, les 3 tirages sont des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre 0,4 : X suit $\mathcal{B}(3; 0,4)$ (0,5 pt). $P(X = 2) = 3 \times 0,4^2 \times 0,6 = 0,288$, légèrement inférieure à $P(Y = 2) = 0,3$ (0,5 pt). (1)
- c) $E(X) = 3 \times 0,4 = 1,2$ et $V(X) = 3 \times 0,4 \times 0,6 = 0,72$ (0,5 pt). $E(Y) = \frac{0 \times 20 + 1 \times 60 + 2 \times 36 + 3 \times 4}{120} = \frac{144}{120} = 1,2$ et $V(Y) = \frac{20 \times 1,44 + 60 \times 0,04 + 36 \times 0,64 + 4 \times 3,24}{120} = \frac{28,8 + 2,4 + 23,04 + 12,96}{120} = \frac{67,2}{120} = 0,56$ (0,5 pt). (1)
- d) La linéarité de l'espérance ne demande aucune indépendance : $E(Y) = E(B_1) + E(B_2) + E(B_3) = 3 \times 0,4 = 1,2 = E(X)$ (0,5 pt). L'additivité de la variance exige l'indépendance ; or, sans remise, les B_i ne sont pas indépendantes (par exemple $P_{\{B_1=1\}}(B_2 = 1) = \frac{3}{9} \neq 0,4$), et effectivement $V(Y) = 0,56 \neq 3 \times 0,4 \times 0,6 = 0,72$ (0,5 pt). (1)

Erreur fréquente — Additionner des variances sans vérifier l'indépendance : l'espérance d'une somme se calcule toujours terme à terme, la variance seulement pour des variables indépendantes.

Exercice 5 – Pour aller plus loin**(3 pts)**

- a) $(q + p)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n P(X = k)$ et $(q - p)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-p)^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k P(X = k)$. (1 pt) (1)
- b) En additionnant, les termes d'indice impair s'annulent et ceux d'indice pair sont doublés : $(q + p)^n + (q - p)^n = 2 P(X \text{ pair})$ (0,5 pt). Comme $q + p = 1$ et $q - p = 1 - 2p$, on obtient $P(X \text{ pair}) = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}$ (0,5 pt). (1)
- c) Ici $1 - 2p = 0,4$: $P(X \text{ pair}) = \frac{1 + 0,4^{10}}{2} \approx 0,50005$ (0,5 pt). Comme \$0(1)

Méthode — Additionner les développements de $(a + b)^n$ et de $(a - b)^n$ isole les termes d'indice pair : une idée réutilisable dès qu'on cherche une somme « un terme sur deux ».

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).