

Devoir surveillé – Dénombrement, loi binomiale et sommes de variables aléatoires — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- Calculer $\binom{10}{4}$, puis justifier sans calcul que $\binom{10}{6}$ a la même valeur.
- Combien de mots (ayant un sens ou non) peut-on écrire en permutant les lettres du mot « LYCEE » ?
- X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec $E(X) = 6$ et $V(X) = 4,2$. Déterminer n et p .
- X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes avec $\sigma(X) = 3$ et $\sigma(Y) = 4$. Calculer $\sigma(X - Y)$.

Exercice 2 – Binôme de Newton et loi binomiale

(4 pts)

- À l'aide du triangle de Pascal, développer $(1 + x)^5$.
- En déduire, sans calculatrice, la valeur de $S = \binom{5}{0} + 2\binom{5}{1} + 4\binom{5}{2} + 8\binom{5}{3} + 16\binom{5}{4} + 32\binom{5}{5}$.
- Soit X une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}(n; p)$. Montrer, grâce à la formule du binôme, que $\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$.
- On lance 6 fois une pièce équilibrée et X compte le nombre de « pile ». Montrer que $P(X = k) = \frac{1}{64} \binom{6}{k}$ pour $0 \leq k \leq 6$, puis calculer $P(X = 3)$ et $P(X \geq 5)$.

Exercice 3 – Qui a raison ?

(4 pts)

- Vrai ou faux (justifier) : « Si X et Y sont indépendantes et suivent toutes deux la loi $\mathcal{B}(10; 0,5)$, alors $X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(20; 0,5)$. »
- Vrai ou faux (justifier) : « Si X suit la loi $\mathcal{B}(10; 0,5)$, alors $2X$ suit la loi $\mathcal{B}(20; 0,5)$. »
- Vrai ou faux (justifier) : « Dans un jeu de 32 cartes contenant 4 as, le nombre de mains de 5 cartes contenant exactement 2 as est $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3}$. »
- Vrai ou faux (justifier) : « Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X - Y) = V(X) - V(Y)$. »

Exercice 4 – Problème — Contrôle d'ampoules

(5 pts)

- Une usine fabrique des ampoules ; chacune est défectueuse avec la probabilité 0,03, indépendamment des autres. On prélève un lot de 50 ampoules, assimilé à un tirage avec remise, et on note X le nombre d'ampoules défectueuses du lot. Déterminer la loi de X .
- Calculer la probabilité qu'aucune ampoule du lot ne soit défectueuse, arrondie au millième.
- Calculer $P(X \geq 2)$, arrondie au millième.
- Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$, arrondi au centième. Le remplacement des ampoules défectueuses d'un lot coûte 10 euros de frais fixes plus 2 euros par ampoule défectueuse ; on note $C = 2X + 10$ ce coût. Calculer $E(C)$ et $\sigma(C)$.
- On prélève désormais n ampoules. Déterminer le plus petit entier n pour lequel la probabilité d'obtenir au moins une ampoule défectueuse est supérieure ou égale à 0,9.

Exercice 5 – Problème — Les ventes d’une pâtisserie*(4 pts)*

- a) Chaque jour, 40 clients entrent dans une pâtisserie ; chacun achète une tarte avec la probabilité 0,25, indépendamment des autres. Par ailleurs, 30 clients passent commande en ligne ; chacun ajoute un gâteau avec la probabilité 0,4, indépendamment des autres. On note U le nombre de tartes et W le nombre de gâteaux vendus dans la journée, et on admet que U et W sont indépendantes. Donner la loi, l'espérance et la variance de U et de W .
- b) On note $T = U + W$ le nombre total de pâtisseries vendues dans la journée. Calculer $E(T)$, $V(T)$ et $\sigma(T)$, arrondi au centième.
- c) Un élève affirme que T suit une loi binomiale de paramètre $n = 70$. Montrer que c'est impossible.
- d) Une tarte rapporte 3 euros et un gâteau 5 euros. Calculer l'espérance et l'écart-type, arrondi au centième, de la recette $R = 3U + 5W$.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).