

Corrigé et barème – Dénombrement, loi binomiale et sommes de variables aléatoires — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) $\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{5040}{24} = 210$ (0,5 pt). Choisir les 6 éléments retenus revient à choisir les 4 éléments exclus, donc $\binom{10}{6} = \binom{10}{4} = 210$ (0,5 pt). (0,75)
- b) On place les deux E : $\binom{5}{2} = 10$ choix de positions, puis on range L, Y, C dans les 3 places restantes : $3! = 6$ façons. Total $10 \times 6 = 60$ mots (on retrouve $\frac{5!}{2}$). (0,5 pt) (0,75)
- c) $\frac{V(X)}{E(X)} = \frac{np(1-p)}{np} = 1-p = \frac{4,2}{6} = 0,7$, donc $p = 0,3$ (0,5 pt), puis $n = \frac{6}{0,3} = 20$ (0,5 pt). (0,75)
- d) X et Y indépendantes : $V(X - Y) = V(X) + (-1)^2 V(Y) = 9 + 16 = 25$, donc $\sigma(X - Y) = 5$, et non $3 - 4$ ou $4 - 3$. (0,5 pt) (0,75)

Astuce — Le quotient $\frac{V(X)}{E(X)}$ élimine n et donne directement $1 - p$: c'est le chemin le plus court pour retrouver les paramètres d'une loi binomiale.

Exercice 2 – Binôme de Newton et loi binomiale

(4 pts)

- a) Ligne $n = 5$ du triangle de Pascal : 1, 5, 10, 10, 5, 1. Donc $(1 + x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$. (1 pt) (1)
- b) $S = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} 2^k$: c'est le développement précédent pour $x = 2$, donc $S = (1 + 2)^5 = 3^5 = 243$. Contrôle : $1 + 10 + 40 + 80 + 80 + 32 = 243$. (1 pt) (1)
- c) $\sum_{k=0}^n P(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$, par la formule du binôme appliquée à $a = p$ et $b = 1 - p$. (1 pt) (1)
- d) Les lancers sont identiques et indépendants, donc X suit $\mathcal{B}(6; \frac{1}{2})$ et $P(X = k) = \binom{6}{k} (\frac{1}{2})^k (\frac{1}{2})^{6-k} = \frac{1}{2^6} \binom{6}{k} = \frac{1}{64} \binom{6}{k}$ (0,5 pt). $P(X = 3) = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$ et $P(X \geq 5) = \frac{6+1}{64} = \frac{7}{64}$ (0,5 pt). (1)

Méthode — Une somme de la forme $\sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ se reconnaît comme $(a + b)^n$: on identifie a et b avant de se lancer dans le moindre calcul.

Exercice 3 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Vrai. X peut être vue comme le nombre de « pile » en 10 lancers d'une pièce équilibrée, et Y comme le nombre de « pile » en 10 autres lancers indépendants des premiers. $X + Y$ compte alors les succès de 20 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre 0,5 : $X + Y$ suit $\mathcal{B}(20; 0,5)$. (1 pt) (1)
- b) Faux. $2X$ ne prend que des valeurs paires, donc $P(2X = 1) = 0$, alors que si Z suit $\mathcal{B}(20; 0,5)$, $P(Z = 1) = 20 \times 0,5^{20} \neq 0$. Autre argument : $V(2X) = 4 \times 2,5 = 10$ alors que $V(Z) = 20 \times 0,25 = 5$. (1 pt) (1)
- c) Vrai. Une main est un ensemble de 5 cartes : on choisit les 2 as parmi les 4, puis les 3 autres cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as. On obtient $6 \times 3\,276 = 19\,656$ mains. (1 pt) (1)
- d) Faux. Pour X et Y indépendantes, $V(X - Y) = V(X) + (-1)^2 V(Y) = V(X) + V(Y)$. Contre-exemple : X et Y indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$; $X - Y$ prend les valeurs $-1, 0, 1$ avec les probabilités $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, donc $V(X - Y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, alors que $V(X) - V(Y) = 0$. (1 pt) (1)

Piège — $2X$ n'est pas la somme de deux copies indépendantes de X : doubler une variable multiplie sa variance par 4, alors qu'ajouter une copie indépendante la multiplie seulement par 2.

Exercice 4 – Problème — Contrôle d'ampoules

(5 pts)

- a) On répète 50 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « l'ampoule est défectueuse », de probabilité $p = 0,03$ (0,5 pt). X compte les succès, donc X suit la loi $\mathcal{B}(50; 0,03)$ (0,5 pt). (1)
- b) $P(X = 0) = 0,97^{50} \approx 0,218$. (1 pt) (1)
- c) $P(X = 1) = \binom{50}{1} \times 0,03 \times 0,97^{49} = 1,5 \times 0,97^{49} \approx 0,3372$ (0,5 pt). Donc $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - 0,2181 - 0,3372 = 0,4447$, soit $P(X \geq 2) \approx 0,445$ (0,5 pt). (1)
- d) $E(X) = 50 \times 0,03 = 1,5$; $V(X) = 50 \times 0,03 \times 0,97 = 1,455$ et $\sigma(X) = \sqrt{1,455} \approx 1,21$ (0,5 pt). $E(C) = 2E(X) + 10 = 13$ euros et $\sigma(C) = 2\sigma(X) \approx 2,41$ euros : la constante 10 ne modifie pas la dispersion (0,5 pt). (1)
- e) Avec X_n de loi $\mathcal{B}(n; 0,03)$: $P(X_n \geq 1) = 1 - 0,97^n \geq 0,9 \iff 0,97^n \leq 0,1 \iff n \ln 0,97 \leq \ln 0,1 \iff n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,97}$, le sens changeant car $\ln 0,97 < 0$ (0,5 pt). Or $\frac{\ln 0,1}{\ln 0,97} \approx 75,6$, donc $n = 76$. Contrôle : $0,97^{75} \approx 0,102 > 0,1$ et $0,97^{76} \approx 0,099 \leq 0,1$ (0,5 pt). (1)

Erreur fréquente — En divisant par $\ln 0,97$, qui est négatif, on oublie souvent de changer le sens de l'inégalité : calculer $0,97^n$ pour les deux entiers voisins du seuil confirme le résultat.

Exercice 5 – Problème — Les ventes d'une pâtisserie

(4 pts)

- a) U suit $\mathcal{B}(40; 0,25)$: $E(U) = 10$ et $V(U) = 40 \times 0,25 \times 0,75 = 7,5$ (0,5 pt). W suit $\mathcal{B}(30; 0,4)$: $E(W) = 12$ et $V(W) = 30 \times 0,4 \times 0,6 = 7,2$ (0,5 pt). (1)
- b) Par linéarité, $E(T) = 10 + 12 = 22$; U et W étant indépendantes, $V(T) = 7,5 + 7,2 = 14,7$ (0,5 pt), donc $\sigma(T) = \sqrt{14,7} \approx 3,83$ (0,5 pt). (1)
- c) Si T suivait $\mathcal{B}(70; p)$, on aurait $70p = 22$, donc $p = \frac{11}{35}$ (0,5 pt), puis $V(T) = 70 \times \frac{11}{35} \times \frac{24}{35} = \frac{528}{35} \approx 15,09 \neq 14,7$: contradiction. Les 70 épreuves n'ont pas toutes la même probabilité de succès (0,5 pt). (1)
- d) $E(R) = 3E(U) + 5E(W) = 30 + 60 = 90$ euros (0,5 pt). Par indépendance, $V(R) = 3^2 V(U) + 5^2 V(W) = 67,5 + 180 = 247,5$, donc $\sigma(R) = \sqrt{247,5} \approx 15,73$ euros (0,5 pt). (1)

Astuce — Pour réfuter une loi supposée, il suffit de confronter son espérance et sa variance aux valeurs connues : si une seule formule ne colle pas, la loi est exclue.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).