

Corrigé et barème – Dénombrement, loi binomiale et sommes de variables aléatoires — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Automatismes

(4 pts)

- a) $\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = \frac{336}{6} = 56$ (0,5 pt) ; $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ (0,5 pt). (1)
- b) Un code est un 4-uplet de l'ensemble des 10 chiffres : $10^4 = 10\,000$ codes (0,5 pt). Chiffres deux à deux distincts : arrangements de 4 éléments parmi 10, soit $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$ codes (0,5 pt). (1)
- c) $E(X) = np = 10 \times 0,3 = 3$ (0,5 pt) ; $V(X) = np(1-p) = 10 \times 0,3 \times 0,7 = 2,1$ (0,5 pt). (1)
- d) Par linéarité de l'espérance, $E(X+Y) = 2 + 5 = 7$ (0,5 pt). X et Y étant indépendantes, les variances s'ajoutent : $V(X+Y) = 1 + 3 = 4$ (0,5 pt). (1)

Astuce — Pour calculer $\binom{n}{k}$ à la main, on écrit k facteurs décroissants à partir de n au numérateur et $k!$ au dénominateur : inutile de calculer $n!$ en entier.

Exercice 2 – Former une troupe

(4 pts)

- a) L'ordre ne compte pas et les membres sont distincts : c'est une combinaison de 4 éléments parmi 15, soit $\binom{15}{4} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{32\,760}{24} = 1\,365$ groupes. (1 pt) (1)
- b) On choisit 2 filles parmi 9 puis 2 garçons parmi 6 (principe multiplicatif) : $\binom{9}{2} \times \binom{6}{2} = 36 \times 15 = 540$ groupes. (1 pt) (1)
- c) Événement contraire : aucun garçon, c'est-à-dire 4 filles choisies parmi 9, soit $\binom{9}{4} = 126$ groupes. D'où $1\,365 - 126 = 1\,239$ groupes avec au moins un garçon. (1 pt) (1)
- d) Ici l'ordre compte, car les trois fonctions sont différentes : c'est un arrangement de 3 éléments parmi 15, soit $15 \times 14 \times 13 = 2\,730$ attributions. (1 pt) (1)

Méthode — « Au moins un » se traite presque toujours par le complémentaire : on retire du nombre total les cas « aucun », bien plus simples à compter.

Exercice 3 – Lancers francs

(6 pts)

- a) Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de succès « réussir le lancer », de probabilité $p = 0,8$ (0,5 pt). On répète 5 fois cette épreuve de façon identique et indépendante (0,5 pt), et X compte le nombre de succès : X suit la loi $\mathcal{B}(5; 0,8)$ (0,5 pt). (1,2)
- b) Une telle suite est déterminée par la place de l'unique échec parmi les 5 lancers : il y en a $\binom{5}{4} = 5$ (0,5 pt). Chacune a pour probabilité $0,8^4 \times 0,2 = 0,08192$ (0,5 pt), d'où $P(X = 4) = 5 \times 0,08192 = 0,4096$ (0,5 pt). (1,2)
- c) $P(X = 5) = 0,8^5 = 0,32768 \approx 0,328$. (1 pt) (1,2)
- d) Manquer au moins 2 lancers, c'est en réussir au plus 3 : $P(X \leq 3) = 1 - P(X = 4) - P(X = 5) = 1 - 0,4096 - 0,32768 = 0,27072 \approx 0,271$. (1 pt) (1,2)
- e) $E(X) = 5 \times 0,8 = 4$: sur un grand nombre de séries de 5 lancers, le joueur en réussit 4 en moyenne (0,5 pt). $V(X) = 5 \times 0,8 \times 0,2 = 0,8$, donc $\sigma(X) = \sqrt{0,8} \approx 0,89$ (0,5 pt). (1,2)

Piège — « Manquer au moins 2 lancers » porte sur les échecs : on le traduit d'abord en « réussir au plus 3 lancers », sinon on calcule la probabilité d'un autre événement.

Exercice 4 – Un jeu répété*(6 pts)*

- a) $E(X) = -2 \times 0,5 + 1 \times 0,3 + 4 \times 0,2 = -1 + 0,3 + 0,8 = 0,1$ euro. (1 pt) (1,2)
- b) Par définition, $V(X) = 0,5 \times (-2 - 0,1)^2 + 0,3 \times (1 - 0,1)^2 + 0,2 \times (4 - 0,1)^2$ (0,5 pt), soit $V(X) = 0,5 \times 4,41 + 0,3 \times 0,81 + 0,2 \times 15,21 = 2,205 + 0,243 + 3,042 = 5,49$ (1 pt). (1,2)
- c) $S = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$, où les X_i sont indépendantes et de même loi que X (0,5 pt). Donc $E(S) = 100 \times 0,1 = 10$ et $V(S) = 100 \times 5,49 = 549$ (0,5 pt), puis $\sigma(S) = \sqrt{549} \approx 23,43$ (0,5 pt). (1,2)
- d) $E(M) = \frac{E(S)}{100} = 0,1$ et $V(M) = \frac{V(S)}{100^2} = \frac{549}{10\,000} = 0,0549$, donc $\sigma(M) = \sqrt{0,0549} \approx 0,234$. (1 pt) (1,2)
- e) Chaque partie est une épreuve de Bernoulli de succès « gagner 4 euros », de probabilité 0,2 ; les 100 parties sont identiques et indépendantes, donc N suit la loi $\mathcal{B}(100; 0,2)$ (0,5 pt) et $E(N) = 100 \times 0,2 = 20$ (0,5 pt). (1,2)

Erreur fréquente — Pour une moyenne de n parties indépendantes, la variance de X est divisée par n et l'écart-type par $\sqrt{n}$: la moyenne fluctue beaucoup moins qu'une partie isolée.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).