Dérivation : fonctions composées

Fiche méthode

(Spécialité maths Terminale · Analyse · Dérivation)

La démarche pour dériver et étudier une composée

1. Je décompose : je repère le dernier calcul (racine, puissance, inverse, exponentielle) et j'écris $u(x)$ et $u'(x)$ à part.

2. Je vérifie la condition : $u(x) > 0$ pour $\sqrt{u}$, $u(x) \neq 0$ pour $\frac{1}{u}$ ou une puissance négative.

3. J'applique la formule en nommant la forme, puis je **factorise** $f'(x)$.

4. J'étudie le signe : j'écarte les facteurs positifs (e^u, $\sqrt{u}$, carrés) ; si le signe ne se lit toujours pas, je passe par f''.

Le réflexe — chaque dérivée se justifie par la forme reconnue et la condition vérifiée (« u(x) > 0 sur I, donc… ») ; une dérivée laissée développée ne permet pas d'étudier un signe.

Cas 1 · Composer et décomposer

Réflexe — le dernier calcul effectué est la fonction extérieure ; même sens de variation pour u et g : g∘u croissante, sens contraires : décroissante.

Exemple. Questions types : « Écrire f comme composée », « Ensemble de définition », « Sens de variation sans dériver ». Exemple : $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.

On calcule d'abord $\sqrt{x}$, puis son exponentielle : $f = g \circ u$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $g(X) = e^X$.
u est définie sur $[0\,;+\infty[$ et g sur $\mathbb{R}$: f est définie sur $[0\,;+\infty[$.
u est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et g est croissante sur $\mathbb{R}$: même sens, donc f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Attention — g∘u ≠ u∘g en général ; on remplace la variable de g par u(x) tout entier.

Cas 2 · Règle générale et g(ax + b)

Réflexe — dérivée de l'extérieur prise en u(x), multipliée par u'(x) ; pour g(ax + b), on multiplie par a.

Exemple. Questions types : « Calculer la dérivée de $(ax+b)^n$, e^{ax+b}… », « Exprimer la dérivée de $x \mapsto g(u(x))$ ». Exemple : $f(x) = (6x+1)^3$.

$f(x) = g(6x+1)$ avec $g(X) = X^3$, $g'(X) = 3X^2$, et $a = 6$.
Donc $f'(x) = 6 \times 3\,(6x+1)^2 = 18(6x+1)^2$.

Attention — oublier le facteur a (ou u') : la dérivée de $(6x+1)^3$ n'est pas $3(6x+1)^2$.

Cas 3 · Formules √u, uⁿ, 1/u, eᵘ

Réflexe — j'écris u et u', je vérifie la condition, j'applique la formule de la forme reconnue, je simplifie.

Exemple. Questions types : « Montrer que $f'(x) = \ldots$ ». Exemple : $f(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

$f = \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = e^x + 1 > 0$ (donc $u(x) \neq 0$) et $u'(x) = e^x$.
Avec $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$: $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(e^x+1)^2}$.
Le numérateur est négatif et le dénominateur positif : f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Attention — $(e^u)' = u'e^u$, jamais $u\,e^{u-1}$; √u n'est dérivable que là où u > 0.

Cas 4 · Dérivée seconde

Réflexe — f″ = (f′)′ ; signe de f″ → variations de f′ → minimum ou maximum de f′ → signe de f′.

Exemple. Questions types : « Calculer $f''(x)$ », « Étudier les variations de f' et en déduire son signe ». Exemple : $f(x) = 2e^x - x^2$ sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2e^x - 2x$: le signe ne se lit pas. $f''(x) = 2e^x - 2 = 2(e^x - 1)$.
$e^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$: f' décroît sur $]-\infty\,;0]$ et croît sur $[0\,;+\infty[$, de minimum $f'(0) = 2$.
Donc $f'(x) \geqslant 2 > 0$ pour tout x : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Attention — f″ > 0 veut dire « f′ croissante », pas « f croissante ».

Cas 5 · Étude complète

Réflexe — intervalle, f′ factorisée, facteurs positifs écartés, signe du reste, tableau de variations, extremum calculé.

Exemple. Questions types : « Étudier les variations de f », « Déterminer son maximum », « Équation de la tangente en a ». Exemple : $f(x) = e^{4x-x^2}$.

$f'(x) = (4-2x)\,e^{4x-x^2}$, et $e^{4x-x^2} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $4-2x$.
f est croissante sur $]-\infty\,;2]$, décroissante sur $[2\,;+\infty[$.
Maximum : $f(2) = e^{8-4} = e^4$.

Attention — le maximum de eᵘ est eˆM, pas M : même abscisse, valeur différente.

Les pièges

- Oublier le facteur u′ : (eˆ(x²))′ = 2x eˆ(x²), pas eˆ(x²).
- Dériver l'intérieur à l'intérieur : (√(x² + 3))′ ≠ 1/(2√(2x)).
- Traiter eᵘ comme une puissance : (eᵘ)′ ≠ u e^(u-1).
- Oublier la condition : √(x²) = |x| n'est pas dérivable en 0.
- Confondre g∘u et u∘g : écrire u et g avant de dériver.
- Lire f″ comme si elle renseignait sur f : elle donne les variations de f′.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).