

Devoir surveillé – Dérivation avancée — convexité et primitives

Étude de la convexité des fonctions et calcul de primitives — programme de Terminale Spé Maths

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Dérivées de fonctions composées

(4 pts)

- a) a) Dériver $f(x) = (7 - 2x)^4$ sur $\mathbb{R}$.
- b) b) Dériver $g(x) = e^{x^2-4x}$ sur $\mathbb{R}$.
- c) c) Dériver $h(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$ sur $\mathbb{R}$, après avoir justifié que h est bien définie.
- d) d) Dériver $m(x) = \ln(5 - x)$ sur $] -\infty ; 5[$.

Exercice 2 – Convexité et points d'inflexion

(4 pts)

- a) a) Soit $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 5$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.
- b) b) Montrer que $f''(x) = 12(x + 2)(x - 1)$.
- c) c) Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe, puis concave.
- d) d) Donner les coordonnées des points d'inflexion de la courbe de f .

Exercice 3 – Primitives

(4 pts)

- a) a) Donner une primitive de $f(x) = 9x^2 - \frac{2}{x^2}$ sur $]0 ; +\infty[$.
- b) b) Donner une primitive de $g(x) = (6x + 2)e^{3x^2+2x}$ sur $\mathbb{R}$.
- c) c) Donner une primitive de $h(x) = \frac{5}{5x-3}$ sur $\left] \frac{3}{5} ; +\infty \right[$.
- d) d) Déterminer la primitive P de $p(x) = 2x + e^x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $P(0) = -1$.

Exercice 4 – Une inégalité par convexité

(4 pts)

- a) a) Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
- b) b) En déduire la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$.
- c) c) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 1.
- d) d) En déduire que $\frac{1}{x} \geq 2 - x$ pour tout $x > 0$, et préciser le cas d'égalité.

Exercice 5 – Lecture d'un tableau de signes*(4 pts)*

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[-3; 6]$. Le tableau ci-dessous donne le signe de sa dérivée seconde. On sait de plus que $f(-1) = 2$ et $f'(-1) = 3$.

x	-3	-1	4	6
signe de $f''(x)$	$+$	$0 -$	$0 +$	

- a) a) Donner les intervalles de convexité et de concavité de f .
- b) b) Donner les abscisses des points d'inflexion de la courbe de f .
- c) c) La fonction f' est-elle croissante ou décroissante sur $[-1; 4]$? Justifier.
- d) d) Déterminer une équation de la tangente T au point d'abscisse -1 , puis préciser la position de la courbe par rapport à T de part et d'autre de ce point.

Bon courage !