

Corrigé et barème – Dérivation avancée — convexité et primitives

Étude de la convexité des fonctions et calcul de primitives — programme de Terminale Spé Maths

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Dérivées de fonctions composées

(4 pts)

- a) $u(x) = 7 - 2x$, $u' = -2$: $f'(x) = 4 \times (-2)(7 - 2x)^3 = -8(7 - 2x)^3$. (1)
- b) $u(x) = x^2 - 4x$, $u'(x) = 2x - 4$: $g'(x) = (2x - 4)e^{x^2 - 4x}$. (1)
- c) $x^2 + 6x + 10$ a pour discriminant $36 - 40 = -4 < 0$ et un coefficient dominant positif, donc il est strictement positif : h est définie et dérivable, et $h'(x) = \frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x+10}} = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+10}}$. (1)
- d) $u(x) = 5 - x > 0$ sur l'intervalle, $u'(x) = -1$: $m'(x) = \frac{-1}{5-x}$, négative, donc m est décroissante. (1)

Erreur fréquente — Le facteur u' doit apparaître dans chaque dérivée, avec son signe : il vaut -2 , $2x - 4$ ou -1 selon les cas.

Exercice 2 – Convexité et points d'inflexion

(4 pts)

- a) $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x$. (1)
- b) $f''(x) = 12x^2 + 12x - 24 = 12(x^2 + x - 2)$. Le trinôme $x^2 + x - 2$ a pour racines -2 et 1 (somme -1 , produit -2), donc $f''(x) = 12(x + 2)(x - 1)$. (1)
- c) Le coefficient dominant de f'' est positif : $f'' \geq 0$ à l'extérieur des racines et $f'' \leq 0$ entre elles. Donc f est convexe sur $] -\infty ; -2]$ et sur $[1 ; +\infty[$, et concave sur $[-2 ; 1]$. (1)
- d) f'' s'annule en -2 et en 1 en changeant de signe : ce sont deux points d'inflexion. $f(-2) = 16 - 16 - 48 + 5 = -43$ et $f(1) = 1 + 2 - 12 + 5 = -4$, d'où les points $(-2 ; -43)$ et $(1 ; -4)$. (1)

Le point clé — Factoriser f'' transforme l'étude de convexité en un simple tableau de signes de trinôme.

Exercice 3 – Primitives

(4 pts)

- a) $F(x) = 3x^3 + \frac{2}{x}$ (car $(\frac{2}{x})' = -\frac{2}{x^2}$). (1)
- b) $u = 3x^2 + 2x$, $u' = 6x + 2$: $G(x) = e^{3x^2+2x}$. (1)
- c) $u = 5x - 3 > 0$, $u' = 5$: $H(x) = \ln(5x - 3)$. (1)
- d) $P(x) = x^2 + e^x + k$; $P(0) = 1 + k = -1$ donne $k = -2$, donc $P(x) = x^2 + e^x - 2$. (1)

Attention — Sans condition initiale, une primitive n'est définie qu'à une constante additive près, et toujours sur un intervalle où l'expression a un sens.

Exercice 4 – Une inégalité par convexité

(4 pts)

- a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. (1)
- b) Pour $x > 0$, $x^3 > 0$ donc $f''(x) > 0$: f est convexe sur $]0 ; +\infty[$. (1)
- c) $f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$, donc $T : y = -1(x - 1) + 1 = -x + 2$. (1)
- d) Une fonction convexe a sa courbe au-dessus de ses tangentes : pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} \geq 2 - x$. L'égalité a lieu uniquement au point de contact, c'est-à-dire pour $x = 1$. (1)

Repère — Une inégalité entre une fonction et une expression affine se démontre presque toujours en reconnaissant une tangente et en utilisant la convexité.

Exercice 5 – Lecture d'un tableau de signes*(4 pts)*

- a) f est convexe sur $[-3; -1]$ et sur $[4; 6]$, concave sur $[-1; 4]$. (1)
- b) f'' s'annule en -1 et en 4 en changeant de signe : les abscisses des points d'inflexion sont -1 et 4 . (1)
- c) Sur $[-1; 4]$, $f'' \leq 0$ et f'' est la dérivée de f' : donc f' est décroissante sur cet intervalle. (1)
- d) $T : y = f'(-1)(x + 1) + f(-1) = 3(x + 1) + 2 = 3x + 5$. Sur $[-3; -1]$, f est convexe : la courbe est au-dessus de T ; sur $[-1; 4]$, f est concave : la courbe est en dessous de T . La courbe traverse donc sa tangente en -1 . (1)

À retenir — Le signe de f'' donne à la fois la convexité de f , les variations de f' et la position de la courbe par rapport à ses tangentes.