Convexité

Fiche méthode

(Spécialité maths Terminale · Analyse · Dérivation et convexité)

La démarche pour étudier la convexité

1. Je vérifie l'intervalle : la convexité se dit sur un intervalle où f est deux fois dérivable.

2. Je calcule $f'(x)$ puis $f''(x)$ et je factorise $f''(x)$ (exponentielle en facteur, trinôme, quotient).

3. Je dresse le tableau de signes de f'' en écartant les facteurs de signe connu.

4. Je conclus : convexe où $f'' \geqslant 0$, concave où $f'' \leqslant 0$, points d'inflexion là où f'' change de signe ; puis j'exploite (tangente, inégalité).

Le réflexe — une convexité se justifie toujours par une raison écrite : signe de f″, croissance de f′ ou position par rapport aux cordes. « On voit sur la courbe » ne suffit que si la question demande une lecture graphique.

Cas 1 · Utiliser les cordes

Réflexe — convexe : image du milieu ≤ moyenne des images, courbe sous la corde ; concave : l'inverse.

Exemple. Questions types : « Comparer $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ », « Majorer $f(x)$ à l'aide d'une corde ». Exemple : montrer que, pour tous réels a et b, $e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{e^a+e^b}{2}$.

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée seconde e^x est positive).

Le milieu de la corde joignant $(a\,;e^a)$ et $(b\,;e^b)$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{a+b}{2}\,;\dfrac{e^a+e^b}{2}\right)$.

La courbe est en dessous de cette corde, donc au point d'abscisse $\dfrac{a+b}{2}$: $e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{e^a+e^b}{2}$.

Attention — la comparaison avec la corde ne vaut qu'entre les deux abscisses, et seulement sur un intervalle où f est convexe.

Cas 2 · Étudier la convexité avec f″

Réflexe — je dérive deux fois, je factorise f″(x), je mets de côté e^u > 0 et les carrés, tableau de signes, conclusion par intervalle.

Exemple. Questions types : « Étudier la convexité de f », « Montrer que $f''(x) = \ldots$ et en déduire ». Exemple : $f(x) = (2x-5)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2e^x + (2x-5)e^x = (2x-3)e^x$, puis $f''(x) = 2e^x + (2x-3)e^x = (2x-1)e^x$.

$e^x > 0$, donc $f''(x)$ a le signe de $2x-1$: négatif pour $x \leqslant \dfrac{1}{2}$, positif pour $x \geqslant \dfrac{1}{2}$.

f est concave sur $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Attention — le signe de f′ donne les variations, celui de f″ la convexité.

Cas 3 · Points d'inflexion

Réflexe — zéros de f″ où elle change de signe ; ordonnée f(a) ; tangente y = f′(a)(x − a) + f(a).

Exemple. Questions types : « Montrer que la courbe admet un point d'inflexion », « Donner une équation de la tangente en ce point ». Exemple : $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 5$.

$f'(x) = -3x^2 + 12x$ et $f''(x) = -6x + 12 = -6(x - 2)$: f'' s'annule en 2 en changeant de signe (positive avant, négative après).
$f(2) = -8 + 24 - 5 = 11$: le point $I(2\,;11)$ est un point d'inflexion.
$f'(2) = -12 + 24 = 12$, tangente $y = 12(x - 2) + 11$, soit $y = 12x - 13$; la courbe est au-dessus à gauche de I (convexe), en dessous à droite (concave).

Attention — f″(a) = 0 sans changement de signe : pas d'inflexion.

Cas 4 · Démontrer une inégalité

Réflexe — je reconnais une tangente ; convexité par f″ ; équation de la tangente ; position de la courbe.

Exemple. Questions types : « Démontrer que pour tout réel x, … », « En déduire un minorant de … ». Exemple : montrer que $e^x \geqslant e\,x$ pour tout réel x.

$f(x) = e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car $f''(x) = e^x > 0$: sa courbe est au-dessus de toutes ses tangentes.
En 1 : $f(1) = e$ et $f'(1) = e$, tangente $y = e(x - 1) + e$, soit $y = e\,x$.
Donc, pour tout réel x, $e^x \geqslant e\,x$, avec égalité pour $x = 1$.

Attention — la tangente doit être prise en un point de l'intervalle où f est convexe.

Cas 5 · Lire sur la courbe de f′ ou de f″

Réflexe — je lis le nom de la courbe : f′ croissante ou f″ au-dessus de l'axe ⟹ f convexe ; extremum de f′ ⟹ inflexion.

Exemple. Questions types : « La courbe donnée est celle de f' : déterminer la convexité de f ». Exemple : la courbe de f' est croissante sur $[-2\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;5]$.

f' croissante sur $[-2\,;1]$: f est convexe sur $[-2\,;1]$.
f' décroissante sur $[1\,;5]$: f est concave sur $[1\,;5]$.
f' change de sens de variation en 1 (maximum de f') : la courbe de f a un point d'inflexion d'abscisse 1.

Attention — sur la courbe de f′, un zéro de f′ donne un extremum de f, pas une inflexion.

Les pièges

- Convexe ne veut pas dire croissante : x ↦ x + 4/x est convexe sur]0 ; +∞[et décroissante sur]0 ; 2].
- La convexité se dit sur un intervalle : la fonction inverse n'est pas convexe sur ℝ*.
- f″(a) = 0 ne suffit pas pour une inflexion : x⁴ est convexe sur ℝ.
- Pas de point d'inflexion hors de l'ensemble de définition, même si f″ change de signe.
- Une tangente horizontale n'indique pas un point d'inflexion.
- Dans f″(x) = P(x)e^(u(x)), le signe de f″ est celui de P(x), car l'exponentielle est strictement positive.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).