Convexité

Fiche tableaux : ce qu'il faut connaître
(Spécialité maths Terminale)

Convexe ou concave : les caractérisations

	f **convexe sur** I	f **concave sur** I
Cordes	courbe en dessous	courbe au-dessus
Milieu	$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$
Tangentes	courbe au-dessus	courbe en dessous
f'	croissante	décroissante
f''	$f'' \geqslant 0$	$f'' \leqslant 0$

Exemple : $x \mapsto -3x^2 + x$ a pour dérivée seconde $-6 < 0$: elle est concave sur $\mathbb{R}$.

Fonctions de référence

$f(x)$	$f''(x)$	**Convexité**
$ax + b$	0	convexe et concave sur $\mathbb{R}$
x^2	2	convexe sur $\mathbb{R}$
x^3	$6x$	concave sur $]-\infty\,;0]$, convexe sur $[0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{2}{x^3}$	concave sur $]-\infty\,;0[$, convexe sur $]0\,;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$	concave sur $[0\,;+\infty[$
e^x	e^x	convexe sur $\mathbb{R}$

Exemple : la fonction cube a un point d'inflexion à l'origine, où sa tangente est l'axe des abscisses.

Point d'inflexion

Situation en a	**Conclusion**
f'' s'annule en changeant de signe	point d'inflexion $(a\,;f(a))$
$f''(a) = 0$ sans changement de signe	pas d'inflexion
f' admet un extremum en a (croît puis décroît, ou l'inverse)	point d'inflexion
changement de convexité en a hors du domaine	pas de point d'inflexion

Exemple : pour $x \mapsto x^3 + 3x$, $f''(x) = 6x$ change de signe en 0 : inflexion en $(0\,;0)$, de tangente $y = 3x$.

Lecture graphique

Courbe tracée	**Variations de** f	f **convexe**	**Inflexion**
$\mathcal{C}_f$	lecture directe	sous les cordes	courbe qui traverse sa tangente
$\mathcal{C}_{f'}$	signe de f'	f' croissante	extremum de f'
$\mathcal{C}_{f''}$	non lisibles	au-dessus de l'axe	la courbe traverse l'axe

Exemple : si f' admet un minimum en -2, la courbe de f passe de concave à convexe en -2.

Inégalités de convexité classiques

Inégalité	Fonction	Tangente en	Valable pour
$e^x \geqslant 1 + x$	exp, convexe	0	tout réel x
$\sqrt{x} \leqslant \dfrac{x+1}{2}$	$\sqrt{\ }$, concave	1	$x \geqslant 0$
$\dfrac{1}{x} \geqslant 2 - x$	inverse, convexe sur $]0\,;+\infty[$	1	$x > 0$

Exemple : $\dfrac{1}{x} - (2-x) = \dfrac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$ pour $x > 0$ confirme la troisième ligne.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).