

## Devoir surveillé – Convexité

Fonction convexe ou concave (cordes, tangentes), dérivée seconde et convexité, points d'inflexion, inégalités obtenues par convexité (position par rapport aux tangentes), lecture graphique

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : \_\_\_\_\_

Date : \_\_\_\_\_

Note : \_\_\_\_\_ / 20

*Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.*

---

### Exercice 1 – Lecture d'un tableau de signes

(4 pts)

- a) Une fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $[-5; 5]$  ; le tableau de signes de  $f''$  est :

|          |    |   |    |   |   |   |   |
|----------|----|---|----|---|---|---|---|
| $x$      | -5 |   | -2 |   | 3 |   | 5 |
| $f''(x)$ |    | - | 0  | + | 0 | - |   |

Donner les intervalles où  $f$  est convexe, puis concave.

- b) Donner les abscisses des points d'inflexion de la courbe de  $f$ , en justifiant.  
c) Donner le sens de variation de  $f'$  sur  $[-5; 5]$ .  
d) On sait que  $f(3) = 0,5$  et  $f'(3) = -2$ . Déterminer une équation de la tangente  $T$  en 3 et la position de la courbe par rapport à  $T$  sur  $[-2; 3]$ .

### Exercice 2 – Étude d'un polynôme

(4 pts)

- a) Soit  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$  sur  $\mathbb{R}$ . Calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$ .  
b) Étudier la convexité de  $f$ .  
c) Donner les coordonnées du point d'inflexion  $I$  de la courbe de  $f$ .  
d) Déterminer une équation de la tangente à la courbe en  $I$ .

### Exercice 3 – Avec l'exponentielle

(4 pts)

- a) Soit  $g(x) = (x^2 - 3)e^x$  sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $g''(x) = (x^2 + 4x - 1)e^x$ .  
b) Déterminer le signe de  $g''(x)$  selon les valeurs de  $x$ .  
c) En déduire la convexité de  $g$ .  
d) Combien la courbe de  $g$  a-t-elle de points d'inflexion ? Donner leurs abscisses exactes puis arrondies au centième.

### Exercice 4 – Une inégalité de convexité

(4 pts)

- a) Soit  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  sur  $] -1; +\infty[$ . Calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$ .  
b) Étudier la convexité de  $f$  sur  $] -1; +\infty[$ .  
c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 0.  
d) En déduire que  $\frac{1}{1+x} \geq 1 - x$  pour tout  $x > -1$ , puis un minorant de  $\frac{1}{1,03}$ .

**Exercice 5 – Vrai ou faux ? Justifier**

(4 pts)

- a) « Si  $f''(2) = 0$ , la courbe de  $f$  a un point d'inflexion d'abscisse 2. »
- b) « Une fonction concave sur  $\mathbb{R}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ . »
- c) « La fonction  $x \mapsto x^3 - 4,5x^2$  est convexe sur  $[1; +\infty[$ . »
- d) « Si  $f$  est convexe sur  $[0; 2]$  avec  $f(0) = 1$  et  $f(2) = 5$ , alors  $f(1) \leq 3$ . »

*Bon courage !*

---

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).