

## Corrigé et barème – Convexité

Fonction convexe ou concave (cordes, tangentes), dérivée seconde et convexité, points d'inflexion, inégalités obtenues par convexité (position par rapport aux tangentes), lecture graphique

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

### Exercice 1 – Lecture d'un tableau de signes

(4 pts)

- $f'' \geq 0$  sur  $[-2; 3]$  : convexe sur  $[-2; 3]$  ;  $f'' \leq 0$  : concave sur  $[-5; -2]$  et sur  $[3; 5]$ . (1)
- $f''$  s'annule en changeant de signe en  $-2$  et en  $3$  : deux points d'inflexion, d'abscisses  $-2$  et  $3$ . (1)
- Signe de  $f''$  = variations de  $f'$  : décroissante sur  $[-5; -2]$ , croissante sur  $[-2; 3]$ , décroissante sur  $[3; 5]$ . (1)
- $T : y = -2(x - 3) + 0,5 = -2x + 6,5$ .  $f$  convexe sur  $[-2; 3]$  et  $3 \in [-2; 3]$  : courbe au-dessus de  $T$  sur  $[-2; 3]$ . (1)

**Erreur fréquente** — Le signe de  $f''$  donne la convexité de  $f$  et les variations de  $f'$ , jamais les variations de  $f$ .

### Exercice 2 – Étude d'un polynôme

(4 pts)

- $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$  ;  $f''(x) = 12x - 6$ . (1)
- $f''(x) = 12(x - \frac{1}{2})$  : concave sur  $] -\infty; \frac{1}{2}]$ , convexe sur  $[\frac{1}{2}; +\infty[$ . (1)
- $f''$  change de signe en  $\frac{1}{2}$  ;  $f(\frac{1}{2}) = 0,25 - 0,75 - 6 + 1 = -5,5$  ;  $I(0,5; -5,5)$ . (1)
- $f'(0,5) = 1,5 - 3 - 12 = -13,5$  ;  $y = -13,5(x - 0,5) - 5,5 = -13,5x + 1,25$ . (1)

**À retenir** — Un polynôme de degré 3 a toujours exactement un point d'inflexion, là où s'annule sa dérivée seconde affine.

### Exercice 3 – Avec l'exponentielle

(4 pts)

- $g'(x) = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x$  ;  $g''(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x - 3)e^x = (x^2 + 4x - 1)e^x$ . (1)
- $e^x > 0$  : signe de  $x^2 + 4x - 1$  ;  $\Delta = 20$ , racines  $-2 - \sqrt{5}$  et  $-2 + \sqrt{5}$  ; positif à l'extérieur, négatif entre. (1)
- Convexe sur  $] -\infty; -2 - \sqrt{5}]$  et sur  $[-2 + \sqrt{5}; +\infty[$  ; concave sur  $[-2 - \sqrt{5}; -2 + \sqrt{5}]$ . (1)
- Deux changements de signe : deux points d'inflexion, d'abscisses  $-2 - \sqrt{5} \approx -4,24$  et  $-2 + \sqrt{5} \approx 0,24$ . (1)

**Le point clé** — Le facteur exponentiel est strictement positif : tout le travail porte sur le signe du trinôme.

### Exercice 4 – Une inégalité de convexité

(4 pts)

- $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$  ;  $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ . (1)
- Pour  $x > -1$ ,  $(1+x)^3 > 0$  donc  $f''(x) > 0$  :  $f$  convexe sur  $] -1; +\infty[$ . (1)
- $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = -1$  :  $y = 1 - x$ . (1)
- Convexe donc au-dessus de sa tangente en 0 :  $\frac{1}{1+x} \geq 1 - x$ . Avec  $x = 0,03$  :  $\frac{1}{1,03} \geq 0,97$ . (1)

**Attention** — L'inégalité n'est valable que sur l'intervalle de convexité  $] -1; +\infty[$  : pour  $x < -1$ , elle est fausse.

**Exercice 5 – Vrai ou faux ? Justifier***(4 pts)*

- a) Faux :  $f(x) = (x - 2)^4$  vérifie  $f''(x) = 12(x - 2)^2 \geq 0$ , nulle en 2 sans changer de signe. (1)
- b) Faux :  $x \mapsto -e^{-x}$  a pour dérivée  $e^{-x} > 0$  (croissante) et pour dérivée seconde  $-e^{-x} < 0$  (concave). (1)
- c) Faux :  $f''(x) = 6x - 9 < 0$  sur  $[1; 1,5[$ , donc  $f$  est concave sur  $[1; 1,5]$ . (1)
- d) Vrai : la corde passe par  $(0; 1)$  et  $(2; 5)$ , d'équation  $y = 2x + 1$  ; la courbe est dessous :  $f(1) \leq 3$ . (1)

**Astuce** — Pour montrer qu'une affirmation est fausse, un seul contre-exemple suffit ; pour la valider, il faut une propriété du cours.

---

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*