Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Fiche méthode

(Spécialité maths Terminale · Analyse · Limites et continuité)

La démarche pour une équation f(x) = k

1. Je justifie la continuité : fonctions de référence et opérations, ou « f est dérivable, donc continue ».

2. J'étudie les variations (signe de f') et je dresse le tableau avec les valeurs ou les limites aux bornes.

3. Sur chaque intervalle où f est strictement monotone, je regarde si k est entre les valeurs aux bornes : une solution, sinon aucune.

4. J'encadre la solution par balayage ou dichotomie, en vérifiant le signe de $f(x) - k$ aux deux bornes.

Le réflexe — « d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires » ne rapporte les points que si les trois hypothèses sont écrites : f continue, f strictement monotone, k compris entre les valeurs (ou strictement entre les limites) aux bornes.

Cas 1 · Continuité en un point de jonction

Réflexe — je calcule f(a), la limite à gauche et la limite à droite : continue si les trois sont égales.

Exemple. Questions types : « f est-elle continue en a ? », « Pour quelle valeur du paramètre f est-elle continue ? ». Exemple : $f(x) = x^2 + 1$ si $x < 2$ et $f(x) = 3x - 1$ si $x \geqslant 2$.

À gauche : pour $x < 2$, $f(x) = x^2 + 1$ (polynôme), donc $\lim\limits_{x \to 2,\, x<2} f(x) = 4 + 1 = 5$.

En 2 et à droite : $f(2) = 3 \times 2 - 1 = 5$, et $3x - 1 \to 5$.

Les trois nombres sont égaux : f est continue en 2. Elle n'y est pas dérivable : le taux tend vers 4 à gauche (dérivée de $x^2 + 1$ en 2) et vers 3 à droite.

Attention — continue n'implique pas dérivable : |x| et $\sqrt{x}$ en 0 sont continues, pas dérivables.

Cas 2 · Justifier la continuité

Réflexe — je décompose en fonctions de référence et je nomme l'opération (somme, produit, quotient à dénominateur non nul, composée).

Exemple. Questions types : « Justifier que f est continue sur I », « Déterminer la limite de $f(u_n)$ ». Exemple : $f(x) = \mathrm{e}^x \sqrt{x + 2}$.

$x \mapsto x + 2$ est affine, continue sur $[-2\,;+\infty[$ et à valeurs dans $[0\,;+\infty[$, où la racine carrée est continue : par composée, $x \mapsto \sqrt{x+2}$ est continue sur $[-2\,;+\infty[$.

L'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.

Par produit, f est continue sur $[-2\,;+\infty[$.

Attention — racine : nombre sous la racine ≥ 0 ; logarithme : nombre > 0 ; quotient : dénominateur $\neq 0$.

Cas 3 · Existence d'une solution (TVI)

Réflexe — continuité sur [a ; b], valeurs f(a) et f(b), k entre les deux, puis « d'après le théorème des valeurs

intermédiaires ».

Exemple. Questions types : « Montrer que l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a\,;b]$ ». Exemple : $x^3 + 2x^2 - 4 = 0$ sur $[1\,;2]$.

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$ est une fonction polynôme, donc continue sur $[1\,;2]$.

$f(1) = 1 + 2 - 4 = -1$ et $f(2) = 8 + 8 - 4 = 12$.

0 est compris entre -1 et 12 : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[1\,;2]$.

Attention — le TVI donne « au moins une » solution, ni sa valeur ni leur nombre.

Cas 4 · Unique solution, nombre de solutions

Réflexe — continue + strictement monotone + k entre les valeurs (ou strictement entre les limites) : une unique solution ; un morceau par flèche du tableau.

Exemple. Questions types : « Montrer que $f(x) = k$ admet une unique solution α », « Combien de solutions… ? ». Exemple : $x^5 + x = 1$ sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = x^5 + x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue, et $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

1 est strictement compris entre $-\infty$ et $+\infty$: d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Attention — sans « strictement », pas d'unicité ; une limite n'est jamais atteinte.

Cas 5 · Encadrer la solution

Réflexe — balayage au pas de 0,1 puis 0,01 ; dichotomie : on garde la moitié où le signe change, amplitude $(b - a)/2^n$.

Exemple. Questions types : « Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} », « Que renvoie `dicho(a, b, p)` ? ». Exemple : la solution α de $x^5 + x = 1$ (cas 4).

Pas de 0,1 : $f(0{,}7) \approx 0{,}868 < 1$ et $f(0{,}8) \approx 1{,}128 > 1$, donc $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$.

Pas de 0,01 : $f(0{,}75) \approx 0{,}987 < 1$ et $f(0{,}76) \approx 1{,}014 > 1$, donc $0{,}75 < \alpha < 0{,}76$.

Par dichotomie sur $[0\,;1]$, une amplitude d'au plus 10^{-4} demande 14 étapes : $2^{13} = 8\,192 < 10\,000 \leqslant 2^{14} = 16\,384$.

Attention — pour f(x) = k, on suit le signe de f(x) − k, pas celui de f(x).

Cas 6 · Limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Réflexe — récurrence (encadrement + sens de variation), convergence monotone, puis $f(\ell) = \ell$ avec f continue en ℓ.

Exemple. Questions types : « Montrer que (u_n) converge », « Déterminer sa limite ». Exemple : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + 2$.

$f(x) = \sqrt{x} + 2$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$, avec $f(0) = 2$ et $f(4) = 4$. Par récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ (initialisation : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$; hérédité : on applique f, qui conserve l'ordre).

Croissante et majorée par 4, la suite converge vers un réel ℓ de $[0\,;4]$.

f est continue en ℓ, donc $\ell = \sqrt{\ell} + 2$. Avec $X = \sqrt{\ell} \geqslant 0$: $X^2 - X - 2 = 0$, soit $X = 2$ ou $X = -1$. Donc $X = 2$ et $\ell = 4$.

Attention — $f(\ell) = \ell$ donne les candidats, pas la convergence.

Les pièges

- Le TVI donne « au moins une » solution ; « une unique » exige la stricte monotonie.
- « La courbe se trace sans lever le crayon » ne justifie pas la continuité : une phrase suffit, « f est dérivable, donc continue » ou « somme/produit/composée de fonctions continues ».
- Aux bornes ouvertes, k doit être strictement entre les limites : une limite n'est pas atteinte.
- Continue n'implique pas dérivable : $|x|$ et $\sqrt{x}$ en 0.
- Pour $f(x) = k$, c'est le signe de $f(x) - k$ qui change, pas celui de $f(x)$.
- $f(\ell) = \ell$ ne prouve pas la convergence : on la démontre d'abord.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).