

Devoir surveillé – Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Notion de continuité, propriétés, théorème des valeurs intermédiaires et applications (Analyse — Tle)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Ensembles de continuité

(4 pts)

a) a) Déterminer l'ensemble des réels sur lequel

$f(x) = \frac{2x+5}{x^2-x-6}$ est continue.

c) c) Même question pour $h(x) = \ln(5-2x)$.

b) b) Même question pour $g(x) = \sqrt{9-x}$.

d) d) Même question pour $k(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 2 – Raccordement de deux expressions

(4 pts)

Soient a et b deux réels et f définie par $f(x) = x^2 + ax + 3$ si $x \leq 1$, et $f(x) = \frac{b}{x}$ si $x > 1$.

a) a) Déterminer la relation entre a et b traduisant la continuité de f en 1.

b) b) Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles f est de plus dérivable en 1.

c) c) Donner alors l'expression de f et l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

d) d) Un élève affirme : « toute fonction continue en 1 y est dérivable ». Expliquer son erreur à l'aide d'un contre-exemple.

Exercice 3 – Nombre de solutions et valeurs exactes

(4 pts)

On considère la fonction f définie sur $[0; 3]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

a) a) Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 3]$ en précisant les valeurs aux bornes et à l'extremum.

b) b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[0; 3]$.

c) c) Donner un encadrement d'amplitude 0,1 de la plus grande de ces deux solutions.

d) d) Vérifier que 1 est solution, puis en déduire les valeurs exactes des deux solutions.

Exercice 4 – Suite récurrente affine

(4 pts)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.

a) a) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

b) b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n < 4$.

c) c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante, puis justifier qu'elle converge.

d) d) Déterminer sa limite en précisant le théorème utilisé.

Exercice 5 – Concentration d'un médicament*(4 pts)*

La concentration d'un médicament dans le sang, en milligrammes par litre, t heures après la prise, est modélisée sur $[0; 10]$ par $C(t) = 5t e^{-0,5t}$. Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs arrondies au centième.

t (h)	0	1	2	3	4	6	8	10
$C(t)$ (mg/L)	0	3,03	3,68	3,35	2,71	1,49	0,73	0,34

- a) a) Justifier que C est continue sur $[0; 10]$, puis montrer que $C'(t) = 5(1 - 0,5t)e^{-0,5t}$ et dresser le tableau de variations.
- b) b) Démontrer que l'équation $C(t) = 3$ admet exactement deux solutions sur $[0; 10]$.
- c) c) Donner un encadrement d'amplitude 0,1 de la plus grande de ces deux solutions.
- d) d) Un élève conclut du tableau que la concentration vaut 3 mg/L une seule fois. Expliquer son erreur.

Bon courage !