

Corrigé et barème – Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Notion de continuité, propriétés, théorème des valeurs intermédiaires et applications (Analyse — Tle)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Ensembles de continuité

(4 pts)

- $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ s'annule en 3 et -2 : f est continue sur $] - \infty; -2[$, $] - 2; 3[$ et $]3; +\infty[$. (1)
- Il faut $9 - x \geq 0$, soit $x \leq 9$: g est continue sur $] - \infty; 9]$ (composée d'une fonction affine et de la racine carrée). (1)
- Il faut $5 - 2x > 0$, soit $x < 2,5$: h est continue sur $] - \infty; 2,5[$. (1)
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et l'exponentielle sur $\mathbb{R}$: k est continue sur $] - \infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. (1)

Repère — On cite toujours l'opération qui justifie la continuité et on exclut explicitement les valeurs interdites.

Exercice 2 – Raccordement de deux expressions

(4 pts)

- Limite à gauche et valeur en 1 : $1 + a + 3 = a + 4$; limite à droite : b . La continuité impose $b = a + 4$. (1)
- Nombre dérivé à gauche : $2 + a$; à droite : $-\frac{b}{x}$ en 1, soit $-b$. Donc $2 + a = -b = -(a + 4)$, d'où $2a = -6$, $a = -3$ et $b = 1$. (1)
- $f(x) = x^2 - 3x + 3$ pour $x \leq 1$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 1$; $f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$, donc la tangente a pour équation $y = -x + 2$. (1)
- L'implication est dans l'autre sens : dérivable entraîne continue. Contre-exemple : $x \mapsto |x - 1|$ est continue en 1 mais son taux de variation y vaut -1 à gauche et 1 à droite. (1)

Erreur fréquente — La continuité compare les valeurs, la dérivabilité compare les nombres dérivés : ce sont deux conditions distinctes.

Exercice 3 – Nombre de solutions et valeurs exactes

(4 pts)

- $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, négative sur $[0; 2]$ et positive sur $[2; 3]$: f décroît de $f(0) = 2$ à $f(2) = -2$, puis croît jusqu'à $f(3) = 2$. (1)
- Sur $[0; 2]$, f est continue et strictement décroissante de 2 à -2 : une unique solution. Sur $[2; 3]$, continue et strictement croissante de -2 à 2 : une unique solution. Soit exactement deux solutions. (1)
- $f(2,7) = 19,683 - 21,87 + 2 = -0,187 < 0$ et $f(2,8) = 21,952 - 23,52 + 2 = 0,432 > 0$, donc la plus grande solution β vérifie $2,7 < \beta < 2,8$. (1)
- $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$. On factorise : $f(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 2)$; le discriminant de $x^2 - 2x - 2$ vaut 12, de racines $1 - \sqrt{3} < 0$ et $1 + \sqrt{3} \approx 2,73$. Les solutions sur $[0; 3]$ sont donc 1 et $1 + \sqrt{3}$. (1)

Le point clé — Un encadrement numérique ne remplace pas une valeur exacte : dès qu'une racine évidente apparaît, on factorise.

Exercice 4 – Suite récurrente affine*(4 pts)*

- a) $u_1 = 3$; $u_2 = \frac{3}{4} + 3 = 3,75$; $u_3 = \frac{3,75}{4} + 3 = 3,9375$. (1)
- b) Initialisation : $0 \leq 0 < 4$. Hérédité : si $0 \leq u_n < 4$, alors $0 \leq \frac{1}{4}u_n < 1$, donc $3 \leq u_{n+1} < 4$, et en particulier $0 \leq u_{n+1} < 4$. (1)
- c) $u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{3}{4}u_n = \frac{3}{4}(4 - u_n) > 0$ car $u_n < 4$: la suite est croissante. Croissante et majorée par 4, elle converge (convergence monotone). (1)
- d) La fonction $x \mapsto \frac{1}{4}x + 3$ est affine donc continue : la limite L vérifie $L = \frac{1}{4}L + 3$, soit $\frac{3}{4}L = 3$ et $L = 4$. (1)

À retenir — On prouve d'abord la convergence par la monotonie, on identifie la limite ensuite grâce à la continuité.

Exercice 5 – Concentration d'un médicament*(4 pts)*

- a) Produit d'une fonction affine et d'une composée de l'exponentielle, C est continue et dérivable sur $[0; 10]$. $C'(t) = 5e^{-0,5t} + 5t \times (-0,5)e^{-0,5t} = 5(1 - 0,5t)e^{-0,5t}$, positive pour $t < 2$ et négative pour $t > 2$: C croît de 0 à $C(2) \approx 3,68$, puis décroît jusqu'à $C(10) \approx 0,34$. (1)
- b) Sur $[0; 2]$, C est continue et strictement croissante de 0 à environ 3,68 : comme $0 < 3 < 3,68$, il existe une unique solution. Sur $[2; 10]$, C est continue et strictement décroissante d'environ 3,68 à 0,34 : il existe une unique solution. Au total, exactement deux. (1)
- c) $C(3,5) = 17,5 e^{-1,75} \approx 3,04 > 3$ et $C(3,6) = 18 e^{-1,8} \approx 2,98 < 3$, donc la plus grande solution vérifie $3,5 < t < 3,6$. (1)
- d) Le tableau ne donne que huit valeurs isolées : il ne montre pas le comportement entre elles. Entre 0 et 1 la concentration passe de 0 à 3,03 en croissant, donc 3 est déjà atteint une première fois ; la seconde fois a lieu pendant la décroissance, entre 3 et 4. Lire un tableau ne remplace pas l'étude des variations. (1)

Attention — Un tableau de valeurs suggère, le tableau de variations démontre : le nombre de solutions se lit sur les variations.