Combinatoire et dénombrement

Fiche méthode

(Spécialité maths Terminale · Algèbre · Combinatoire et dénombrement)

La démarche pour dénombrer

1. Je décris un résultat type par un objet précis : liste, partie, mot, chemin.

2. Je pose deux questions : l'ordre compte-t-il ? Les répétitions sont-elles possibles ?

3. Je découpe le comptage : en étapes (je multiplie), en cas disjoints (j'additionne), ou par le complémentaire.

4. J'applique la formule : n^k, $\dfrac{n!}{(n-k)!}$, $n!$ ou $\binom{n}{k}$, et je contrôle sur un petit cas.

Le réflexe — un nombre sans justification ne rapporte pas tous les points : on nomme le modèle (« k-uplet », « partie à k éléments ») et le principe utilisé (additif, multiplicatif, complémentaire).

Cas 1 · Principes et k-uplets

Réflexe — étapes : je multiplie ; cas disjoints : j'additionne ; « au moins un » : tout moins « aucun ».

Exemple. Questions types : « Combien de codes… », « Combien contiennent au moins un… ». Exemple : un badge porte 3 symboles, chacun choisi parmi les lettres A à E et les chiffres 0 à 9. Combien de badges contiennent au moins un chiffre ?

Il y a $5 + 10 = 15$ symboles ; un badge est un 3-uplet : $15^3 = 3\,375$ badges.

Badges sans chiffre : $5^3 = 125$.

Par passage au complémentaire : $3\,375 - 125 = 3\,250$ badges contiennent au moins un chiffre.

Attention — on n'additionne que des cas disjoints ; sinon on retire l'intersection.

Cas 2 · Ordre sans répétition

Réflexe — places, rangs, rôles, tirages sans remise : $n(n-1)\cdots(n-k+1)$; tout ranger : $n!$.

Exemple. Questions types : « Combien de classements… », « Combien de façons d'attribuer des rôles… ». Exemple : un jury classe 4 projets (du 1er au 4e) parmi 10 candidats.

L'ordre compte (1er, 2e…) et un projet n'est classé qu'une fois : 4-uplet d'éléments distincts.

$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$ classements, soit $\dfrac{10!}{6!}$.

Attention — $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ et non $\dfrac{n!}{k!}$; et $0! = 1$.

Cas 3 · Parties et combinaisons

Réflexe — groupe, main, tirage simultané : $\binom{n}{k}$; « exactement » : je choisis dans chaque catégorie et je multiplie.

Exemple. Questions types : « Combien de délégations… contenant exactement… ». Exemple : délégation de 5 élèves choisis parmi 9 filles et 7 garçons, avec exactement 3 filles.

3 filles parmi 9 : $\binom{9}{3} = 84$; puis 2 garçons parmi 7 : $\binom{7}{2} = 21$.

Par le principe multiplicatif : $84 \times 21 = 1\,764$ délégations.

Attention — pour « au moins un », choisir d'abord un élément de la catégorie puis compléter au hasard compte plusieurs fois les mêmes groupes : passer par le complémentaire.

Cas 4 · Relation de Pascal et parties

Réflexe — fixer un élément a : les parties qui le contiennent et celles qui ne le contiennent pas ; 2^n parties en tout.

Exemple. Questions types : « Démontrer par dénombrement… », « Calculer à l'aide du triangle… ». Exemple : sachant que la ligne 8 contient 56 et 70 aux colonnes 3 et 4, calculer $\binom{9}{4}$.

Relation de Pascal avec $n = 8$ et $k = 3$: $\binom{9}{4} = \binom{8}{3} + \binom{8}{4}$.

$\binom{9}{4} = 56 + 70 = 126$.

Attention — on additionne deux voisins de la même ligne ; le résultat est sous le second, à la ligne suivante.

Cas 5 · Mots, chemins, choix du modèle

Réflexe — un mot à deux lettres ou un chemin : je choisis les positions d'une des lettres, $\binom{n}{k}$.

Exemple. Questions types : « Combien de chemins de A à B… passant par C ». Exemple : chemins de $(0\,;0)$ à $(3\,;4)$ par pas vers la droite ou vers le haut, passant par $(1\,;1)$.

De $(0\,;0)$ à $(1\,;1)$: 2 pas dont 1 vers le haut, $\binom{2}{1} = 2$.

De $(1\,;1)$ à $(3\,;4)$: 5 pas dont 3 vers le haut, $\binom{5}{3} = 10$.

Principe multiplicatif : $2 \times 10 = 20$ chemins.

Attention — un chemin de $(0\,;0)$ à $(p\,;q)$ compte $p+q$ pas : $\binom{p+q}{q}$, pas $p \times q$.

Les pièges

- « Simultanément », « groupe », « main » : pas d'ordre ; « successivement », « classement », « code » : l'ordre compte.
- Le principe additif ne vaut que pour des cas disjoints.
- « Au moins un » se compte par le complémentaire, jamais en imposant un élément puis en complétant au hasard.
- Groupes sans numéro : on divise par le nombre d'ordres des groupes.
- Lettres identiques dans un mot : elles ne se distinguent pas, on ne compte pas n! anagrammes.
- $0! = 1$ et « 0 parmi n » = « n parmi n » $= 1$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).