# Combinatoire et dénombrement

Fiche tableaux : les formules à connaître
(Spécialité maths Terminale)

## Principes de comptage

| Situation | Formule |
|---|---|
| $A$ et $B$ disjoints | $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$ |
| cas général | $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$ |
| complémentaire dans $E$ | $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$ |
| produit cartésien | $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$ |
| choix en $p$ étapes | $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$ |

Exemple : 3 entrées, 5 plats et 2 desserts donnent $3 \times 5 \times 2 = 30$ menus.

## Choisir k objets parmi n : le bon modèle

| Objet | Ordre | Répétitions | Nombre | Mots de l'énoncé |
|---|---|---|---|---|
| $k$-uplet | oui | oui | $n^k$ | code, avec remise |
| $k$-uplet d'éléments distincts | oui | non | $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ | podium, rôles, sans remise |
| permutation ($k = n$) | oui | non | $n!$ | ranger, anagramme |
| combinaison (partie) | non | non | $\dbinom{n}{k}$ | groupe, main, simultané |
| toutes les parties | — | — | $2^n$ | sous-ensembles |

Exemple : avec 6 couleurs, un drapeau de 3 bandes de couleurs distinctes : $6 \times 5 \times 4 = 120$.

## Factorielles

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n!$ | 1 | 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 | 5 040 | 40 320 |

$(n+1)! = (n+1) \times n!$. Exemple : $\dfrac{11!}{9!} = 11 \times 10 = 110$.

## Coefficients binomiaux

| Propriété | Formule |
|---|---|
| définition | $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ |
| cas usuels | $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1,\ \dbinom{n}{1} = n,\ \dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ |
| symétrie | $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$ |
| relation de Pascal | $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$ |
| somme d'une ligne | $\dbinom{n}{0} + \cdots + \dbinom{n}{n} = 2^n$ |

Exemple : $\binom{25}{23} = \binom{25}{2} = 300$.

## Triangle de Pascal

| $n \setminus k$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 1 | | | | | | | | |
| **1** | 1 | 1 | | | | | | | |
| **2** | 1 | 2 | 1 | | | | | | |
| **3** | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| **4** | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | |
| **5** | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | |
| **6** | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | |
| **7** | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | |
| **8** | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 |

Chaque nombre est la somme de celui du dessus et de celui du dessus à gauche : $21 + 35 = 56$.

## Mots, chemins, tirages

| **Situation** | **Nombre** |
|---|---|
| mots de $n$ lettres : $k$ lettres A, $n-k$ lettres B | $\binom{n}{k}$ |
| chemins de $(0\,;0)$ à $(p\,;q)$ (droite / haut) | $\binom{p+q}{q}$ |
| tirage successif avec remise | $n^k$ |
| tirage successif sans remise | $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ |
| tirage simultané | $\binom{n}{k}$ |

Exemple : de $(0\,;0)$ à $(4\,;2)$, $\binom{6}{2} = 15$ chemins.

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*