

Corrigé et barème – Combinatoire et dénombrement

Principe multiplicatif, k-uplets, arrangements, permutations, combinaisons, coefficients binomiaux et triangle de Pascal

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Calculs sur les factorielles et les coefficients binomiaux (4 pts)

- a) $\binom{17}{3} = \frac{17 \times 16 \times 15}{6} = 680$. (1)
- b) $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1)$. (1)
- c) $\frac{n(n-1)}{2} = 210 \iff n^2 - n - 420 = 0$; $\Delta = 1\,681 = 41^2$, racines 21 et -20 ; n entier naturel : $n = 21$. (1)
- d) $\frac{(n+1)n}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2+n-n^2+3n-2}{2} = \frac{4n-2}{2} = 2n-1$. (1)

Erreur fréquente — Dans c), l'équation du second degré a une racine négative qu'il faut écarter explicitement : n est un entier naturel.

Exercice 2 – Bureau et commission d'une association (4 pts)

- a) 3-uplets d'éléments distincts : $20 \times 19 \times 18 = 6\,840$. (1)
- b) $\binom{20}{3} = \frac{6\,840}{3!} = 1\,140$. (1)
- c) 20-uplets de {oui ; non ; abstention} : $3^{20} = 3\,486\,784\,401$. (1)
- d) Il compte des choix ordonnés : chaque commission est comptée $3! = 6$ fois, il faut diviser par 6 (on obtient 1 140). (1)

À retenir — On passe d'un bureau (ordonné) à une commission (non ordonnée) en divisant par $k!$, le nombre d'ordres des k personnes choisies.

Exercice 3 – Jetons de trois couleurs (4 pts)

- a) $\binom{15}{4} = 1\,365$. (1)
- b) 2 bleus parmi 6 et 2 autres parmi 9 : $\binom{6}{2} \times \binom{9}{2} = 15 \times 36 = 540$. (1)
- c) Sans jaune : $\binom{11}{4} = 330$; donc $1\,365 - 330 = 1\,035$. (1)
- d) Une couleur est doublée : $\binom{6}{2} \times 4 \times 5 + 6 \times \binom{4}{2} \times 5 + 6 \times 4 \times \binom{5}{2} = 300 + 180 + 240 = 720$. (1)

Repère — « Au moins un » se traite par le complémentaire ; « les trois couleurs » par une partition selon la couleur qui apparaît deux fois.

Exercice 4 – Triangle de Pascal et binôme (4 pts)

- a) À partir de la ligne 5 (1 ; 5 ; 10 ; 10 ; 5 ; 1) : 1 ; 6 ; 15 ; 20 ; 15 ; 6 ; 1. (1)
- b) Coefficients 1, 4, 6, 4, 1 et puissances de -3 : $x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$. (1)
- c) $\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\right] + \left[\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}\right] = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}$ (relation de Pascal trois fois). (1)
- d) Avec $n = 9$, $k = 2$: $\binom{11}{4} = 330$; contrôle : $36 + 2 \times 84 + 126 = 330$. (1)

Le point clé — Écrire $2\binom{n}{k+1}$ comme $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+1}$ pour regrouper les termes deux par deux et appliquer la relation de Pascal.

Exercice 5 – Chemins dans un quadrillage*(4 pts)*

- a) Mot de 11 pas dont 3 vers le haut : $\binom{11}{3} = 165$. (1)
- b) De A à C : $\binom{6}{2} = 15$; de C à B : $\binom{5}{1} = 5$; total $15 \times 5 = 75$. (1)
- c) Par complémentaire : $165 - 75 = 90$. (1)
- d) Échanger « droite » et « haut » (symétrie d'axe $y = x$) est une bijection entre les deux ensembles de chemins ; c'est la symétrie $\binom{11}{3} = \binom{11}{8}$. (1)

Attention — Pour un chemin qui passe par C , les nombres de chemins des deux tronçons se multiplient : ils ne s'additionnent pas.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).