Nombres complexes et géométrie

Fiche méthode

(Maths expertes Terminale · Nombres complexes · Utilisation en géométrie)

La démarche pour une question de géométrie

1. Je traduis : chaque point par son affixe, chaque vecteur par « arrivée moins départ », chaque transformation par son écriture $z' = \dots$

2. Je choisis l'outil : module pour une longueur, quotient $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ pour un angle, un alignement ou une orthogonalité, $|z - z_A|$ pour un ensemble, $e^{2i\pi/n}$ pour un polygone régulier.

3. Je calcule en forme algébrique (conjugué du dénominateur) ou exponentielle (rotation, puissance).

4. Je conclus en nommant la propriété, puis je contrôle (longueur conservée, point invariant, Pythagore).

Le réflexe — AB = |z_B − z_A| et (AB ; AC) = arg((z_C − z_A)/(z_B − z_A)) : un module pour les longueurs, un argument pour les angles.

Cas 1 · Traduire une figure en affixes

Réflexe — arrivée moins départ ; une égalité de vecteurs devient une égalité d'affixes ; milieu = demi-somme.

Exemple. Questions types : « Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme », « … du centre ». Exemple : $z_A = 2 - 3i$, $z_B = 6 - i$, $z_C = 5 + 4i$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff z_B - z_A = z_C - z_D$.

Donc $z_D = z_A + z_C - z_B = 1 + 2i$.

Le centre est le milieu de $[AC]$: $\dfrac{7+i}{2} = \dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

Attention — z_A − z_B est l'affixe de BA, pas de AB ; et ABCD parallélogramme, c'est AB = DC (pas CD).

Cas 2 · Longueurs et nature d'un triangle

Réflexe — je calcule les carrés |z_B − z_A|², je compare, puis réciproque de Pythagore.

Exemple. Questions types : « Calculer les longueurs… », « Déterminer la nature du triangle ». Exemple : $K(-1 + 2i)$, $L(2 + 6i)$, $M(3 - i)$.

$KL = |3 + 4i| = 5$, $KM = |4 - 3i| = 5$, $LM^2 = |1 - 7i|^2 = 50$.

$KL = KM$: isocèle en K ; $KL^2 + KM^2 = 50 = LM^2$: rectangle en K.

Le triangle KLM est rectangle isocèle en K.

Attention — AB = |z_B − z_A| (un module), jamais z_B − z_A, ni |z_B| − |z_A|.

Cas 3 · Angle, alignement, orthogonalité

Réflexe — Z = (z_C − z_A)/(z_B − z_A) en forme algébrique ; réel → alignés, imaginaire pur → angle droit en A, |Z| = AC/AB.

Exemple. Questions types : « Démontrer que A, B, C sont alignés », « … que ABC est rectangle ». Exemple : $A(-1 - i)$, $B(1)$, $C(-3 + 3i)$.

$Z = \dfrac{-2+4i}{2+i} = \dfrac{(-2+4i)(2-i)}{5} = \dfrac{10i}{5} = 2i$.

Z est imaginaire pur : $(AB) \perp (AC)$; $|Z| = 2$: $AC = 2AB$.

Le triangle ABC est rectangle en A (non isocèle).

Attention — alignés $\Leftrightarrow$ argument nul modulo π : un quotient réel négatif convient aussi.

Cas 4 · Déterminer un ensemble de points

Réflexe — chaque module sous la forme |z − z_A| (coefficient factorisé, conjugué retiré), puis cercle, disque ou médiatrice.

Exemple. Questions types : « Déterminer l'ensemble des points M tels que… ». Exemple : $|\overline{z} - 4 - i| = |z + 2|$.

$\overline{z} - 4 - i = \overline{z - 4 + i}$, de même module : $|z - (4 - i)| = |z - (-2)|$.
$AM = BM$ avec $z_A = 4 - i$ et $z_B = -2$.
C'est la médiatrice de $[AB]$, qui passe par le milieu d'affixe $1 - \frac{1}{2}i$.

Attention — |z + 2 − 3i| = |z − (−2 + 3i)| : on change les signes pour lire le centre ; un quotient exclut le point qui annule le dénominateur.

Cas 5 · Reconnaître une transformation z′ = az + b

Réflexe — a = 1 : translation ; sinon ω = b/(1 − a), puis a réel → homothétie, |a| = 1 → rotation d'angle arg(a).

Exemple. Questions types : « Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f ». Exemple : $f : z \mapsto -2z + 9 - 3i$.

$a = -2 \neq 1 : \omega = \dfrac{9 - 3i}{1 - (-2)} = 3 - i$.
a est réel : homothétie de centre $\Omega(3 - i)$ et de rapport -2.
Contrôle : $f(3 - i) = -6 + 2i + 9 - 3i = 3 - i$.

Attention — un rapport négatif ne fait pas une rotation (sauf −1) ; et z ↦ z̄ n'est pas de la forme az + b.

Cas 6 · Polygone régulier de centre Ω

Réflexe — z_k − ω = (z$_0$ − ω)e^(2ikπ/n) ; côté 2r sin(π/n).

Exemple. Questions types : « Déterminer les sommets du carré (de l'hexagone) de centre Ω et de sommet A ». Exemple : carré direct de centre $\Omega(-2 + i)$ et de sommet $A(1 + i)$.

$z_A - \omega = 3 : z_B = \omega + 3i = -2 + 4i$, $z_C = \omega - 3 = -5 + i$, $z_D = \omega - 3i = -2 - 2i$.
Rayon $r = 3$, côté $r\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.
Aire : $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18$.

Attention — on fait tourner z − ω autour de Ω : z_{k+1} = e^(2iπ/n)z_k n'est vrai que si le centre est O.

Les pièges

- Écrire « AB = z_B − z_A » : une longueur est un module, AB = |z_B − z_A|.
- Inverser le quotient : (AB ; CD) = arg((z_D − z_C)/(z_B − z_A)), le vecteur d'arrivée est au numérateur.
- Exiger un argument nul modulo 2π pour l'alignement : c'est modulo π, un quotient réel négatif convient.
- Lire le centre de |z + 2 − 3i| = 4 en « 2 − 3i » : le centre est −2 + 3i.
- Oublier « privé de A et B » pour un ensemble défini par un quotient.
- Voir une rotation d'angle π dans z′ = −3z + b : c'est une homothétie de rapport −3.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).