

Devoir surveillé – Nombres complexes et transformations du plan

Utilisation des nombres complexes en géométrie : affixes, distances, angles, translations, rotations, homothéties et similitudes directes (programme de Tle, BO 2019)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Affixes et nature d'un triangle (4 pts)

- On donne $z_A = 1 + 6i$, $z_B = 7 + 2i$ et $z_C = 3 - 4i$. Déterminer les affixes des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$.
- Calculer les longueurs exactes AB , BC et AC .
- Déterminer la nature du triangle ABC en justifiant.
- Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un carré, puis vérifier le résultat par un calcul de longueur.

Exercice 2 – Écritures complexes des transformations (4 pts)

- Donner l'écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe $5 - 2i$.
- Donner l'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω d'affixe $-4 - i$ et de rapport -3 .
- Donner l'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe $-4 - i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $g : z \mapsto (-1 - i\sqrt{3})z + 2 + i\sqrt{3}$.

Exercice 3 – Angles, rapports et alignement (4 pts)

On donne $z_P = -3 - 2i$, $z_Q = 5 + 2i$ et $z_R = -1 + 4i$.

- Calculer $Z = \frac{z_R - z_P}{z_Q - z_P}$ sous forme algébrique.
- En déduire une mesure en radians de l'angle $(\vec{PQ}, \vec{PR})$.
- Calculer le rapport $\frac{PR}{PQ}$ sous forme exacte.
- Le point S d'affixe $13 + 6i$ est-il aligné avec P et Q ? Justifier.

Exercice 4 – Ensembles de points (4 pts)

Déterminer et décrire précisément chacun des ensembles de points M d'affixe z suivants.

- $\mathcal{A} : |z + 5 - 3i| = 6$.
- $\mathcal{B} : |z - 2 - 7i| = |z + 4 + i|$ (on précisera l'affixe d'un point de cet ensemble).
- $\mathcal{C} : |iz + 3 - 2i| = 4$.
- $\mathcal{D} : \text{l'ensemble des points } M \text{ d'affixe } z \neq 3i \text{ tels que } \frac{z - 4}{z - 3i} \text{ soit un réel non nul.}$

Exercice 5 – Similitude directe et polygone régulier*(4 pts)*

On considère $f : z \mapsto (2 + 2i)z + 5$.

- a) a) Démontrer que f admet un unique point invariant Ω et déterminer son affixe.
- b) b) Préciser la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.
- c) c) Déterminer l'affixe de A' , image du point A d'affixe $3i$, puis calculer ΩA et $\Omega A'$ et vérifier la cohérence avec le rapport trouvé.
- d) d) Résoudre l'équation $z^3 = 1$ et démontrer que les images des solutions forment un triangle équilatéral de centre O .

Bon courage !