

Corrigé et barème – Nombres complexes et transformations du plan

Utilisation des nombres complexes en géométrie : affixes, distances, angles, translations, rotations, homothéties et similitudes directes (programme de Tle, BO 2019)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Affixes et nature d'un triangle

(4 pts)

- a) $z_{\overline{AB}} = (7 + 2i) - (1 + 6i) = 6 - 4i$; $z_{\overline{BC}} = (3 - 4i) - (7 + 2i) = -4 - 6i$. (1)
- b) $AB = |6 - 4i| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$; $BC = |-4 - 6i| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$; $AC = |(3 - 4i) - (1 + 6i)| = |2 - 10i| = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$. (1)
- c) $AB = BC$ donc isocèle en B ; de plus $AB^2 + BC^2 = 52 + 52 = 104 = AC^2$, donc d'après la réciproque de Pythagore le triangle est rectangle en B : il est rectangle et isocèle en B . (1)
- d) $ABCD$ parallélogramme $\iff z_D = z_A + z_C - z_B = (1 + 6i) + (3 - 4i) - (7 + 2i) = -3$. Comme il possède déjà un angle droit en B et deux côtés consécutifs égaux, c'est un carré. Vérification : $AD = |-3 - (1 + 6i)| = |-4 - 6i| = 2\sqrt{13} = AB$. (1)

Le point clé — Les longueurs se lisent avec des modules : c'est en comparant $AB^2 + BC^2$ et AC^2 que l'on conclut, jamais en comparant directement des affixes.

Exercice 2 – Écritures complexes des transformations

(4 pts)

- a) $z' = z + 5 - 2i$. (1)
- b) $z' = -3(z - (-4 - i)) + (-4 - i) = -3z - 12 - 3i - 4 - i = -3z - 16 - 4i$. (1)
- c) $z' = i(z - (-4 - i)) + (-4 - i) = iz + 4i - 1 - 4 - i = iz - 5 + 3i$. (1)
- d) $a = -1 - i\sqrt{3}$: $|a| = \sqrt{1+3} = 2$ et $a = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Centre : $\omega = \frac{2+i\sqrt{3}}{1-(-1-i\sqrt{3})} = \frac{2+i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}} = 1$. g est la similitude directe de centre le point d'affixe 1, de rapport 2 et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$. (1)

Attention — Le rapport d'une similitude est $|a|$, donc toujours positif : un coefficient a négatif ou complexe ne donne pas directement le rapport.

Exercice 3 – Angles, rapports et alignement

(4 pts)

- a) $z_R - z_P = 2 + 6i$ et $z_Q - z_P = 8 + 4i$, donc $Z = \frac{(2+6i)(8-4i)}{64+16} = \frac{16-8i+48i+24}{80} = \frac{40+40i}{80} = \frac{1+i}{2}$. (1)
- b) $\arg Z = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$, donc $(\vec{PQ}, \vec{PR}) = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π . (1)
- c) $\frac{PR}{PQ} = |Z| = \frac{|1+i|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (1)
- d) $z_S - z_P = (13 + 6i) - (-3 - 2i) = 16 + 8i = 2(8 + 4i) = 2(z_Q - z_P)$. Le quotient vaut 2, qui est réel : oui, S est aligné avec P et Q (et $\vec{PS} = 2\vec{PQ}$). (1)

Repère — Un seul quotient d'affixes fournit à la fois l'angle (son argument) et le rapport de longueurs (son module).

Exercice 4 – Ensembles de points

(4 pts)

- a) $|z - (-5 + 3i)| = 6$: cercle de centre le point d'affixe $-5 + 3i$ et de rayon 6. (1)
- b) $|z - (2 + 7i)| = |z - (-4 - i)|$: médiatrice du segment joignant les points d'affixes $2 + 7i$ et $-4 - i$; elle passe par leur milieu, d'affixe $\frac{(2+7i)+(-4-i)}{2} = -1 + 3i$. (1)
- c) On factorise par i : $iz + 3 - 2i = i(z + \frac{3-2i}{i}) = i(z - (2 + 3i))$. Comme $|i| = 1$, l'équation devient $|z - (2 + 3i)| = 4$: cercle de centre le point d'affixe $2 + 3i$ et de rayon 4. (1)
- d) Avec $z_A = 4$ et $z_B = 3i$, le quotient $\frac{z-z_A}{z-z_B}$ a pour argument $(\vec{BM}, \vec{AM})$; il est réel non nul si et seulement si cet angle vaut 0 modulo π , c'est-à-dire si M , A et B sont alignés, M étant distinct de A et B : $\mathcal{D}$ est la droite (AB) privée des points A et B . (1)

Erreur fréquente — Un coefficient devant z doit être factorisé avant toute lecture géométrique : son module divise le second membre.

Exercice 5 – Similitude directe et polygone régulier

(4 pts)

- a) $\omega = (2 + 2i)\omega + 5 \iff \omega(1 - (2 + 2i)) = 5 \iff \omega(-1 - 2i) = 5$. Comme $-1 - 2i \neq 0$, il y a une unique solution : $\omega = \frac{5}{-1-2i} = \frac{5(-1+2i)}{1+4} = -1 + 2i$. (1)
- b) $|2 + 2i| = 2\sqrt{2}$ et $2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$: f est la similitude directe de centre $\Omega(-1 + 2i)$, de rapport $2\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. (1)
- c) $z_{A'} = (2 + 2i)(3i) + 5 = 6i - 6 + 5 = -1 + 6i$. Alors $\Omega A = |3i - (-1 + 2i)| = |1 + i| = \sqrt{2}$ et $\Omega A' = |(-1 + 6i) - (-1 + 2i)| = |4i| = 4$. On a bien $\Omega A' = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$. (1)
- d) En posant $z = \rho e^{i\theta}$: $\rho^3 = 1$ et $3\theta \equiv 0 [2\pi]$, d'où $\rho = 1$ et $\theta \in \{0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\}$. Les solutions sont 1 , $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Leurs images sont sur le cercle unité et se déduisent l'une de l'autre par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$: les trois côtés ont donc la même longueur et le triangle est équilatéral. Sa somme des affixes étant nulle, son centre de gravité est O . (1)

À retenir — Le centre d'une similitude directe est son unique point invariant : il se calcule en résolvant $\omega = a\omega + b$, jamais en prenant un milieu.