Forme trigonométrique et exponentielle

Fiche méthode

(Maths expertes Terminale · Nombres complexes · Point de vue géométrique)

La démarche pour calculer avec module et argument

1. Je repère l'opération : somme (forme algébrique), produit, quotient, puissance (forme exponentielle), puissance de cosinus (Euler), équation $z^n = a$.

2. Je passe à la forme utile : module $r = |z|$, puis l'angle qui a le bon cosinus **et** le bon sinus.

3. Je calcule : modules multipliés ou divisés, arguments ajoutés ou soustraits, puis mesure principale dans $]-\pi\,;\pi]$.

4. Je contrôle : retour à la forme algébrique, valeur simple ($x = 0$), ou remplacement dans l'équation.

Le réflexe — dans re^(iθ), r est strictement positif ; deux complexes non nuls sont égaux si et seulement s'ils ont le même module et des arguments égaux à 2π près.

Cas 1 · Valeur exacte par une formule d'addition

Réflexe — j'écris l'angle comme somme ou différence d'angles connus, je calcule le sinus ou le cosinus manquant avec $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et le signe donné par l'intervalle.

Exemple. Questions types : « Calculer la valeur exacte de… », « En déduire $\cos(2a)$ ». Exemple : $\cos a = -\dfrac{12}{37}$ avec $a \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$; calculer $\cos\left(a + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

$\sin^2 a = 1 - \dfrac{144}{1\,369} = \dfrac{1\,225}{1\,369}$ et $\sin a > 0$ sur $\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$: $\sin a = \dfrac{35}{37}$.

$\cos\left(a + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos a \cos\dfrac{\pi}{3} - \sin a \sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{12}{74} - \dfrac{35\sqrt{3}}{74}$.

Donc $\cos\left(a + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{12 + 35\sqrt{3}}{74}$.

Attention — cos(a + b) ≠ cos a + cos b, et le signe est « − » dans cos(a + b), « + » dans cos(a − b).

Cas 2 · Module et argument

Réflexe — r = √(a² + b²), puis cos θ = a/r et sin θ = b/r ; je place le point pour choisir le bon angle.

Exemple. Questions types : « Déterminer le module et un argument de… », « Écrire sous forme trigonométrique ». Exemple : $z = -\sqrt{3} - 3i$.

$|z| = \sqrt{3 + 9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

$\cos\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$: point dans le troisième quart.

Donc $\arg(z) = -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ et $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$.

Attention — le cosinus seul laisse deux angles opposés : c'est le signe du sinus qui tranche.

Cas 3 · Produit, quotient en forme exponentielle

Réflexe — je mets chaque facteur sous la forme re^(iθ), je multiplie ou divise les modules, j'ajoute ou je soustrais les

arguments.

Exemple. Questions types : « Écrire sous forme exponentielle », « En déduire un argument ». Exemple : $\dfrac{-2+2i}{\sqrt{3}-i}$.

$-2+2i = 2\sqrt{2}\,e^{3i\pi/4}$ et $\sqrt{3}-i = 2e^{-i\pi/6}$.
$\dfrac{-2+2i}{\sqrt{3}-i} = \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}$.
Donc le quotient vaut $\sqrt{2}\,e^{11i\pi/12}$.

Attention — e^(iθ) + e^(iθ′) ≠ e^(i(θ + θ′)) : pour une somme, on revient à la forme algébrique.

Cas 4 · Puissance avec Moivre, linéarisation avec Euler

Réflexe — puissance : (re^(iθ))ⁿ = rⁿe^(inθ), puis mesure principale ; cosⁿx : Euler, binôme, regroupement, contrôle en x = 0.

Exemple. Questions types : « Calculer $(a+ib)^n$ », « Linéariser… puis intégrer ». Exemple : $(\sqrt{3}-i)^6$.

$\sqrt{3}-i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right) = 2e^{-i\pi/6}$.
Par Moivre : $(\sqrt{3}-i)^6 = 2^6 e^{-6i\pi/6} = 64e^{-i\pi}$.
Comme $e^{-i\pi} = -1$, le résultat est -64.

Attention — dans la formule d'Euler du sinus, le dénominateur 2i s'élève aussi à la puissance : (2i)³ = −8i.

Cas 5 · Résoudre zⁿ = a

Réflexe — a en forme exponentielle, z = re^(iθ), rⁿ = |a| et nθ = arg(a) + 2kπ, puis k de 0 à n − 1.

Exemple. Questions types : « Résoudre dans $\mathbb{C}$ », « Déterminer $\mathbb{U}_n$ ». Exemple : $z^3 = -27$.

$-27 = 27e^{i\pi}$; avec $z = re^{i\theta}$: $r^3 = 27$ et $3\theta = \pi + 2k\pi$.
Donc $r = 3$ et $\theta = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$, pour $k = 0, 1, 2$.
Solutions : $3e^{i\pi/3}$, $3e^{i\pi} = -3$ et $3e^{5i\pi/3}$.

Attention — il y a exactement n solutions ; aller jusqu'à k = n recompte la première.

Les pièges

- −5e^(iπ/3) n'est pas une forme exponentielle : le module est strictement positif, on écrit 5e^(4iπ/3).
- cos θ − i sin θ n'est pas une forme trigonométrique : c'est cos(−θ) + i sin(−θ).
- Écrire arg(z) = arg(z′) sans « à 2π près » : π/4 et 9π/4 sont deux arguments du même nombre.
- Le nombre 0 n'a pas d'argument : « soit θ un argument de z » suppose z ≠ 0.
- |z| n'est pas la partie réelle : |−4 + 3i| = 5, pas −4.
- Moivre ne distribue pas la puissance : (cos θ + i sin θ)ⁿ ≠ cosⁿθ + i sinⁿθ.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).