

Devoir surveillé – Nombres complexes — forme trigonométrique et exponentielle

Module, argument, forme exponentielle, formules de Moivre et d'Euler, racines n -ièmes : point de vue géométrique du programme de maths expertes (BO 2019).

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Passer d'une forme à l'autre (4 pts)

- a) a) Déterminer le module et un argument de $z_A = -5\sqrt{3} + 5i$.
- b) b) Donner la forme algébrique de $12e^{-i\pi/3}$.
- c) c) Écrire $-4e^{i\pi/9}$ sous forme exponentielle, c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$ avec $r > 0$.
- d) d) Déterminer le module et un argument de z_A^3 , puis sa forme algébrique.

Exercice 2 – Puissances d'un complexe (4 pts)

- a) a) Donner la forme exponentielle de $w = 2 - 2i$.
- b) b) Calculer w^{10} et donner le résultat sous forme algébrique.
- c) c) Déterminer le plus petit entier $n \geq 1$ tel que w^n soit un imaginaire pur.
- d) d) Démontrer que w^8 est un réel strictement positif.

Exercice 3 – Linéarisation et intégrale (4 pts)

- a) a) À l'aide des formules d'Euler, démontrer que pour tout réel x , $\cos^4 x = \frac{3 + 4\cos(2x) + \cos(4x)}{8}$.
- b) b) Contrôler cette égalité pour $x = 0$.
- c) c) Calculer $\int_0^{\pi/3} \cos^4 x \, dx$ et en donner une valeur approchée au centième.
- d) d) Un élève propose $\cos^4 x = \frac{3 + 4\cos(2x) + \cos(4x)}{2}$. Expliquer, sans aucun calcul d'intégrale, pourquoi cette formule est fausse.

Exercice 4 – Une équation de degré 5 (4 pts)

- a) a) Écrire $a = -16\sqrt{2} + 16i\sqrt{2}$ sous forme exponentielle.
- b) b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = a$; les solutions seront données sous forme exponentielle.
- c) c) Démontrer que la somme des cinq solutions est nulle.
- d) d) Démontrer que les cinq points images sont les sommets d'un pentagone régulier dont on précisera le centre et le rayon du cercle circonscrit.

Exercice 5 – Un triangle du plan complexe*(4 pts)*

- a) a) On pose $p = 4$ et $q = 2 + 2i\sqrt{3}$. Déterminer le module et un argument de q .
- b) b) Calculer $\frac{q}{p}$ sous forme exponentielle et en déduire une mesure de l'angle orienté $(\vec{OP}; \vec{OQ})$, où P et Q sont les points d'affixes p et q .
- c) c) Démontrer que le triangle OPQ est équilatéral.
- d) d) Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que $|z - 4| = |z - 2 - 2i\sqrt{3}|$, et justifier que O appartient à Γ .

Bon courage !