

Corrigé et barème – Nombres complexes — forme trigonométrique et exponentielle

Module, argument, forme exponentielle, formules de Moivre et d'Euler, racines n-ièmes : point de vue géométrique du programme de maths expertes (BO 2019).

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Passer d'une forme à l'autre

(4 pts)

- a) $|z_A| = \sqrt{75 + 25} = 10$; $z_A = 10 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$, d'où $\arg(z_A) = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$ et $z_A = 10e^{5i\pi/6}$. (1)
- b) $12 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = 12 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 6 - 6\sqrt{3}i$. (1)
- c) $-1 = e^{i\pi}$, donc $-4e^{i\pi/9} = 4e^{i(\pi+\pi/9)} = 4e^{10i\pi/9}$. (1)
- d) $|z_A^3| = 10^3 = 1000$ et $\arg(z_A^3) = 3 \times \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, donc $z_A^3 = 1000e^{i\pi/2} = 1000i$. (1)

Attention — Dans une forme exponentielle, le facteur devant l'exponentielle est un module : il est strictement positif, et un signe $-$ s'absorbe en ajoutant π à l'argument.

Exercice 2 – Puissances d'un complexe

(4 pts)

- a) $|w| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$ et $w = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$, donc $w = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. (1)
- b) $w^{10} = (2\sqrt{2})^{10}e^{-10i\pi/4} = 2^{15}e^{-5i\pi/2}$; or $-\frac{5\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$, donc $w^{10} = 32768 \times (-i) = -32768i$. (1)
- c) w^n est imaginaire pur si $-\frac{n\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, soit $n \equiv 2 [4]$: le plus petit est $n = 2$, et en effet $w^2 = -8i$. (1)
- d) $w^8 = (2\sqrt{2})^8e^{-2i\pi} = 2^{12} = 4096$, car $e^{-2i\pi} = 1$: c'est bien un réel strictement positif. (1)

Le point clé — Une puissance ne se développe pas : on passe en exponentielle, puis on réduit l'angle obtenu modulo 2π (ou modulo π pour discuter de la nature du résultat).

Exercice 3 – Linéarisation et intégrale

(4 pts)

- a) $\cos^4 x = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^4}{2^4}$; le binôme donne $e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix} = 2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6$, d'où $\cos^4 x = \frac{2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6}{16} = \frac{3 + 4\cos(2x) + \cos(4x)}{8}$. (1)
- b) Pour $x = 0$: $\frac{3+4+1}{8} = 1$ et $\cos^4 0 = 1$: l'égalité est vérifiée. (1)
- c) Une primitive est $F(x) = \frac{3x}{8} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32}$. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{64} = \frac{\pi}{8} + \frac{7\sqrt{3}}{64}$ et $F(0) = 0$: l'intégrale vaut $\frac{\pi}{8} + \frac{7\sqrt{3}}{64} \approx 0,58$. (1)
- d) En $x = 0$, le membre de droite vaudrait $\frac{3+4+1}{2} = 4$, alors que $\cos^4 0 = 1$. Le dénominateur correct est $2^4 = 16$ avant simplification, soit 8 après : l'élève a oublié que la puissance porte aussi sur le dénominateur. (1)

Erreur fréquente — Toute linéarisation se contrôle en une ligne sur une valeur simple, $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$: un dénominateur oublié saute alors aux yeux.

Exercice 4 – Une équation de degré 5

(4 pts)

- a) $|a| = \sqrt{512 + 512} = \sqrt{1024} = 32$ et $a = 32 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$, donc $a = 32e^{3i\pi/4}$. (1)
- b) Avec $z = re^{i\theta}$, $r > 0$: $r^5 = 32$ donne $r = 2$, et $5\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ donne $\theta = \frac{3\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}$. Les solutions sont $2e^{3i\pi/20}$, $2e^{11i\pi/20}$, $2e^{19i\pi/20}$, $2e^{27i\pi/20}$ et $2e^{7i\pi/4}$. (1)
- c) En notant $z_0 = 2e^{3i\pi/20}$ et $q = e^{2i\pi/5}$, les solutions sont les $z_0 q^k$, k de 0 à 4. Leur somme vaut $z_0 \frac{1-q^5}{1-q} = 0$ car $q^5 = 1$ et $q \neq 1$. (1)
- d) Les cinq points ont tous pour module 2 : ils sont sur le cercle de centre O et de rayon 2. Leurs arguments étant espacés de $\frac{2\pi}{5}$, les cinq arcs consécutifs sont égaux, donc les cordes aussi : le pentagone est régulier. (1)

À retenir — L'équation $z^n = a$ donne toujours n solutions de même module, régulièrement réparties sur un cercle : oublier l'une d'elles, c'est oublier un sommet du polygone.

Exercice 5 – Un triangle du plan complexe

(4 pts)

- a) $|q| = \sqrt{4 + 12} = 4$ et $q = 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$, donc $\arg(q) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $q = 4e^{i\pi/3}$. (1)
- b) $\frac{q}{p} = \frac{4e^{i\pi/3}}{4} = e^{i\pi/3}$. Son argument mesure l'angle orienté : $(\vec{OP}; \vec{OQ}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$. (1)
- c) $OP = |p| = 4$ et $OQ = |q| = 4$: le triangle est isocèle en O , d'angle au sommet $\frac{\pi}{3}$. Les deux angles à la base valent donc $\frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$: le triangle est équilatéral. (Vérification : $PQ = |q - p| = |-2 + 2i\sqrt{3}| = \sqrt{4 + 12} = 4$.) (1)
- d) La condition s'écrit $MP = MQ$: Γ est la médiatrice du segment $[PQ]$. Comme $OP = OQ = 4$, le point O est équidistant de P et de Q , donc $O \in \Gamma$. (1)

Repère — Un quotient d'affixes livre deux informations d'un coup : son module compare les longueurs, son argument donne l'angle orienté.