Forme algébrique et conjugué

Fiche méthode

(Maths expertes Terminale · Nombres complexes · Point de vue algébrique)

La démarche pour calculer dans $\mathbb{C}$

1. Je repère la forme du calcul : produit, puissance, quotient, équation, module.

2. Je choisis l'outil : développer et remplacer i^2 par -1 ; conjugué du dénominateur ; poser $z = x + iy$; propriétés du module ou du conjugué ; formule du binôme.

3. Je sépare partie réelle et partie imaginaire, qui sont deux **réels**, et j'identifie si besoin.

4. Je contrôle : en remultipliant, en calculant un module, ou en vérifiant que le résultat est bien réel ou imaginaire pur.

Le réflexe — une égalité entre complexes donne deux égalités entre réels : c'est l'identification, qui ne vaut que si les parties comparées sont réelles.

Cas 1 · Écrire sous forme algébrique

Réflexe — je développe, je remplace i^2 par -1, je regroupe ; pour i^n, je garde le reste de n dans la division par 4.

Exemple. Questions types : « Donner la forme algébrique de… », « Déterminer les réels x et y tels que… ». Exemple : $(3 - i)(2 + 4i)$.

On développe : $(3 - i)(2 + 4i) = 6 + 12i - 2i - 4i^2$.

On remplace i^2 par -1 : $6 + 10i + 4$.

Donc $(3 - i)(2 + 4i) = 10 + 10i$: partie réelle 10, partie imaginaire 10.

Attention — la partie imaginaire est un réel : $\mathrm{Im}(a + ib) = b$, sans le i.

Cas 2 · Réel ou imaginaire pur avec le conjugué

Réflexe — je conjugue l'expression en conjuguant chaque nombre ; si je retrouve le nombre, il est réel ; si je trouve son opposé, il est imaginaire pur.

Exemple. Questions types : « Montrer que … est réel », « Montrer que … est imaginaire pur ». Exemple : $u = z^2 - \overline{z}^2$ pour un complexe z.

Le conjugué d'une différence est la différence des conjugués, celui d'une puissance la puissance du conjugué.

$\overline{u} = \overline{z^2} - \overline{\overline{z}^2} = \overline{z}^2 - z^2 = -u$.

Comme $\overline{u} = -u$, le nombre u est imaginaire pur.

Attention — le conjugué de iz est $-i\,\bar{z}$: i se conjugue aussi.

Cas 3 · Quotient et équations

Réflexe — quotient : je multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur ; équation avec $\bar{z}$: je pose $z = x + iy$ et j'identifie.

Exemple. Questions types : « Écrire $\dfrac{z}{z'}$ sous forme algébrique », « Résoudre dans $\mathbb{C}$ ». Exemples : $\dfrac{5 + 2i}{3 - i}$, puis $z - 2\overline{z} = -8 + 9i$.

$\dfrac{5 + 2i}{3 - i} = \dfrac{(5 + 2i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \dfrac{15 + 5i + 6i + 2i^2}{10} = \dfrac{13}{10} + \dfrac{11}{10}i$.

Avec $z = x + iy$: $z - 2\overline{z} = x + iy - 2x + 2iy = -x + 3iy$.

On identifie : $-x = -8$ et $3y = 9$, donc $z = 8 + 3i$.

Attention — on n'isole pas z quand $\bar{z}$ figure dans l'équation : on passe par x et y.

Cas 4 · Calculer un module sans développer

Réflexe — je découpe en produits, quotients et puissances, puis $|zz'| = |z||z'|$, $|z/z'| = |z|/|z'|$, $|z^n| = |z|^n$.

Exemple. Questions types : « Calculer le module de… », « Montrer que $|\ldots| = \ldots$ ». Exemple : $\left|\dfrac{(3-i)^4}{(1+2i)^3}\right|$.

$|3-i| = \sqrt{10}$ et $|1+2i| = \sqrt{5}$.

Donc $\left|\dfrac{(3-i)^4}{(1+2i)^3}\right| = \dfrac{\left(\sqrt{10}\right)^4}{\left(\sqrt{5}\right)^3} = \dfrac{100}{5\sqrt{5}} = \dfrac{20}{\sqrt{5}}$.

Soit $4\sqrt{5}$ après simplification.

Attention — $|z+z'| \neq |z| + |z'|$: le module ne se découpe pas sur une somme.

Cas 5 · Développer avec la formule du binôme

Réflexe — ligne n du triangle de Pascal, puissances du second terme ($i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$), puis je regroupe.

Exemple. Questions types : « Développer $(a+ib)^n$ », « En déduire une somme de coefficients binomiaux ». Exemple : $(1-2i)^4$.

Ligne 4 : $1, 4, 6, 4, 1$, avec $b = -2i$: $b^2 = -4$, $b^3 = 8i$, $b^4 = 16$.

$(1-2i)^4 = 1 + 4(-2i) + 6(-4) + 4(8i) + 16 = 1 - 8i - 24 + 32i + 16$.

Donc $(1-2i)^4 = -7 + 24i$.

Attention — $(a+b)^n \neq a^n + b^n$, et le signe de $-2i$ se garde dans chaque puissance.

Les pièges

- « $\sqrt{-9} = 3i$ » n'a pas de sens : le symbole $\sqrt{}$ est réservé aux réels positifs.
- $\mathrm{Im}(z)$ est un réel : $\mathrm{Im}(2-6i) = -6$, pas $-6i$.
- $\mathrm{Re}(zz') \neq \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')$: pour $z = z' = i$, $\mathrm{Re}(i^2) = -1$ alors que $\mathrm{Re}(i)\,\mathrm{Re}(i) = 0$.
- On ne compare pas deux complexes non réels : « $z > 0$ » n'a de sens que si z est réel.
- Conjugué : i change de signe aussi, donc le conjugué de iz est $-i\,\bar{z}$.
- $|z+z'| \neq |z| + |z'|$: seule l'inégalité $|z+z'| \leq |z| + |z'|$ est vraie.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).