

Devoir surveillé – Nombres complexes — forme algébrique et géométrie

Construction de $\mathbb{C}$, forme algébrique $a + ib$, conjugué, module et racines carrées : le point de vue algébrique des nombres complexes (maths expertes, BO 2019)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Calculs dans $\mathbb{C}$ (4 pts)

- a) a) Donner la forme algébrique de $(3 - 2i)(1 + 4i)$. c) c) Calculer i^{58} .
- b) b) Donner la forme algébrique de $\frac{2 + 5i}{3 - i}$. d) d) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $(1 - 3i)^2$.

Exercice 2 – Conjugué et module (4 pts)

- a) a) On pose $z = 4 - 7i$. Calculer $|z|$ et $z\bar{z}$.
- b) b) Montrer que, pour tout complexe u , le nombre $u + \bar{u}$ est réel et le nombre $u - \bar{u}$ est imaginaire pur.
- c) c) Déterminer les réels m tels que $(m + 3i)(2 - i)$ soit imaginaire pur.
- d) d) Calculer $|(4 - 7i)^3|$, valeur exacte puis valeur approchée à l'unité.

Exercice 3 – Racines carrées et second degré (4 pts)

- a) a) Déterminer les racines carrées de $-7 + 24i$.
- b) b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1 + 7i)z - 18 + i = 0$.
- c) c) Contrôler les solutions obtenues au b) à l'aide de la somme et du produit des racines.
- d) d) Un élève écrit : « $\Delta = 24 + 10i$ est positif, donc l'équation a deux solutions distinctes ». Expliquer l'erreur de raisonnement.

Exercice 4 – Module et inégalité triangulaire (4 pts)

- a) a) Soient z et z' tels que $|z| = 5$ et $|z'| = 2$. Encadrer $|z - z'|$.
- b) b) Montrer que, pour tout complexe z , $|z + 1|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z) + 1$.
- c) c) On suppose $|z| = 3$. Montrer que $|z^2 - 4| \leq 13$ et déterminer les complexes z pour lesquels il y a égalité.
- d) d) Démontrer l'inégalité triangulaire : pour tous complexes z et z' , $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Exercice 5 – Polynôme de degré 3*(4 pts)*

- a) On pose, pour tout complexe z , $P(z) = z^3 - (4 + i)z^2 + (5 + 4i)z - 5i$.
a) Vérifier que i est une racine de P .
- b) b) Déterminer deux réels a et b tels que $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$ pour tout complexe z .
- c) c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + az + b = 0$.
- d) d) En déduire l'ensemble des solutions de $P(z) = 0$, puis calculer le module de chacune d'elles.

Bon courage !