

Corrigé et barème – Nombres complexes — forme algébrique et géométrie

Construction de $\mathbb{C}$, forme algébrique $a + ib$, conjugué, module et racines carrées : le point de vue algébrique des nombres complexes (maths expertes, BO 2019)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Calculs dans $\mathbb{C}$

(4 pts)

- a) $3 + 12i - 2i - 8i^2 = 3 + 10i + 8 = 11 + 10i$. (1)
 b) $\frac{(2+5i)(3+i)}{9+1} = \frac{6+2i+15i-5}{10} = \frac{1+17i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{17}{10}i$. (1)
 c) $58 = 4 \times 14 + 2$, donc $i^{58} = i^2 = -1$. (1)
 d) $(1 - 3i)^2 = 1 - 6i + 9i^2 = -8 - 6i$: partie réelle -8 , partie imaginaire -6 . (1)

Repère — Un quotient se traite toujours en multipliant par le conjugué du dénominateur, et une puissance de i par le reste de la division par 4.

Exercice 2 – Conjugué et module

(4 pts)

- a) $|z| = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$ et $z\bar{z} = |z|^2 = 65$. (1)
 b) $\overline{u + \bar{u}} = \bar{u} + u = u + \bar{u}$: le nombre est égal à son conjugué, donc réel. $\overline{u - \bar{u}} = \bar{u} - u = -(u - \bar{u})$: il est égal à l'opposé de son conjugué, donc imaginaire pur. (1)
 c) $(m + 3i)(2 - i) = 2m - mi + 6i - 3i^2 = (2m + 3) + (6 - m)i$. Le nombre est imaginaire pur si $2m + 3 = 0$ et $6 - m \neq 0$, soit $m = -\frac{3}{2}$. (1)
 d) $|(4 - 7i)^3| = |4 - 7i|^3 = (\sqrt{65})^3 = 65\sqrt{65} \approx 524$. (1)

Le point clé — Pour montrer qu'un nombre est réel ou imaginaire pur, on compare l'expression à son conjugué plutôt que de calculer sa forme algébrique.

Exercice 3 – Racines carrées et second degré

(4 pts)

- a) Avec $z = x + iy$: $|-7 + 24i| = 25$, d'où $x^2 - y^2 = -7$, $2xy = 24$, $x^2 + y^2 = 25$; donc $x^2 = 9$, $y^2 = 16$, x et y de même signe : les racines sont $3 + 4i$ et $-3 - 4i$. (1)
 b) $\Delta = (1 + 7i)^2 - 4(-18 + i) = 1 + 14i - 49 + 72 - 4i = 24 + 10i$. Ses racines carrées vérifient $x^2 - y^2 = 24$, $2xy = 10$, $x^2 + y^2 = 26$, d'où $x^2 = 25$, $y^2 = 1$, même signe : $\delta = 5 + i$. Solutions : $\frac{1+7i+5+i}{2} = 3 + 4i$ et $\frac{1+7i-5-i}{2} = -2 + 3i$. (1)
 c) Somme : $(3 + 4i) + (-2 + 3i) = 1 + 7i = -\frac{b}{a}$. Produit : $(3 + 4i)(-2 + 3i) = -6 + 9i - 8i - 12 = -18 + i = \frac{c}{a}$. Les deux contrôles sont cohérents. (1)
 d) $24 + 10i$ n'est pas un nombre réel : il n'est ni positif ni négatif, car $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné. La conclusion est juste, mais l'argument est faux : le bon raisonnement est que $\Delta \neq 0$, donc l'équation a deux solutions distinctes. (1)

Erreur fréquente — Le signe d'un discriminant n'existe que si celui-ci est réel ; dans $\mathbb{C}$, seule compte la distinction $\Delta = 0$ ou $\Delta \neq 0$.

Exercice 4 – Module et inégalité triangulaire*(4 pts)*

- a) L'inégalité triangulaire donne $|z - z'| \leq |z| + |z'| = 7$ et la seconde inégalité triangulaire $|z - z'| \geq ||z| - |z'|| = 3$. Donc $3 \leq |z - z'| \leq 7$. (1)
- b) $|z + 1|^2 = (z + 1)(\bar{z} + 1) = z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z) + 1$. (1)
- c) $|z^2 - 4| \leq |z^2| + |-4| = |z|^2 + 4 = 9 + 4 = 13$. Il y a égalité lorsque z^2 et -4 sont positivement colinéaires, soit $z^2 = -9$ (car $|z^2| = 9$), c'est-à-dire $z = 3i$ ou $z = -3i$. (1)
- d) $|z + z'|^2 = (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}')$. Or $\operatorname{Re}(w) \leq |w|$ pour tout w , donc $|z + z'|^2 \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| = (|z| + |z'|)^2$. Les deux membres étant positifs, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. (1)

À retenir — Toute majoration de module se démarre en passant au carré et en écrivant $|w|^2 = w\bar{w}$.

Exercice 5 – Polynôme de degré 3*(4 pts)*

- a) $P(i) = i^3 - (4 + i)i^2 + (5 + 4i)i - 5i = -i + (4 + i) + (5i - 4) - 5i = (4 - 4) + i(-1 + 1 + 5 - 5) = 0$. Donc i est racine. (1)
- b) En développant : $(z - i)(z^2 + az + b) = z^3 + (a - i)z^2 + (b - ia)z - ib$. L'identification du terme constant donne $-ib = -5i$, soit $b = 5$; celle du coefficient de z^2 donne $a - i = -(4 + i)$, soit $a = -4$. Contrôle : $b - ia = 5 + 4i$, conforme. (1)
- c) $z^2 - 4z + 5 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 16 - 20 = -4$, dont une racine carrée est $2i$. Les solutions sont $\frac{4+2i}{2} = 2 + i$ et $\frac{4-2i}{2} = 2 - i$. (1)
- d) $S = \{i; 2 + i; 2 - i\}$. Modules : $|i| = 1$ et $|2 + i| = |2 - i| = \sqrt{5}$. (1)

Astuce — Après factorisation par $(z - a)$, l'identification des termes extrêmes suffit presque toujours ; le coefficient intermédiaire sert de vérification.