Suites de matrices

Fiche méthode

(Maths expertes Terminale · Graphes et matrices)

La démarche pour étudier une suite $U_{n+1} = AU_n + B$

1. J'écris A et B en lisant le système ou l'énoncé ligne par ligne, et je contrôle avec U_1.

2. Je trie : B nulle, la suite est homogène et $U_n = A^n U_0$; sinon, je cherche l'état stable C en résolvant $(I - A)C = B$ et je pose $V_n = U_n - C$.

3. Je calcule A^n : matrice diagonale, conjecture et récurrence, ou $A^n = PD^nP^{-1}$ avec P et D donnés.

4. Je conclus : expressions de u_n et v_n, contrôle pour $n = 0$ et $n = 1$, limite lue sur les puissances λ^n et μ^n.

Le réflexe — c'est le schéma des suites arithmético-géométriques : point fixe, suite auxiliaire, puissance, limite.

Cas 1 · Suite arithmético-géométrique (rappel)

Réflexe — point fixe $\ell = a\ell + b$; $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a ; $u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$; limite lue sur a^n.

Exemple. Question type : « Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite ». Exemple : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 0{,}6\,u_n + 8$.

$\ell = 0{,}6\ell + 8$ donne $0{,}4\ell = 8$, soit $\ell = 20$.

$v_n = u_n - 20$: $v_{n+1} = 0{,}6\,u_n + 8 - 20 = 0{,}6(u_n - 20) = 0{,}6\,v_n$, et $v_0 = -15$.

Donc $u_n = 20 - 15 \times 0{,}6^n$; comme $-1 < 0{,}6 < 1$, (u_n) converge vers 20.

Attention — u_n n'est pas égal à u_0a^n : c'est $u_n - \ell$ qui est géométrique.

Cas 2 · Écrire la relation matricielle

Réflexe — une ligne de A par équation, dans l'ordre des suites ; un 0 pour une suite absente ; les constantes dans B.

Exemple. Question type : « Déterminer A et B telles que $U_{n+1} = AU_n + B$, puis calculer U_1 ». Exemple : $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + 1 \\ v_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ avec $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (v_n est absente de la seconde équation) et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$U_1 = AU_0 + B = \begin{pmatrix} 2 - 4 + 1 \\ 1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Attention — on ne lit pas A colonne par colonne : ce serait la matrice aux lignes et colonnes échangées.

Cas 3 · Suite homogène $U_{n+1} = AU_n$

Réflexe — $U_n = A^nU_0$; A^n par conjecture (A^2, A^3) et récurrence ; contrôle avec $n = 0$ et $n = 1$.

Exemple. Question type : « Démontrer que $M^n = \ldots$, puis exprimer U_n ». Exemple : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $U_{n+1} = MU_n$, $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$: on conjecture $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$.

Vraie pour $n = 0$ (I). Si vraie au rang n : $M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n + 3 & 1 \end{pmatrix}$, vraie au rang $n + 1$.

Donc $U_n = M^nU_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6n + 1 \end{pmatrix}$: $u_n = 2$ et $v_n = 6n + 1$.

Attention — U_nA n'existe pas : on écrit A^nU_0, la matrice carrée à gauche.

Cas 4 · Calculer A^n avec P et D donnés

Réflexe — je vérifie $AP = PD$, je calcule P^{-1}, puis $A^n = PD^nP^{-1}$ (récurrence) ; contrôle avec $n = 1$.

Exemple. Question type : « Vérifier que $AP = PD$ et en déduire A^n ». Exemple : $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$AP = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = PD$, et $\det(P) = -1$, donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 3^n \\ 3 \times 2^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, soit $A^n = \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 2 \times 3^n \\ 3^{n+1} - 3 \times 2^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}$.

Pour $n = 1$: $9 - 4 = 5$, $4 - 6 = -2$, $9 - 6 = 3$, $6 - 6 = 0$: on retrouve A.

Attention — $A^n = PD^nP^{-1}$, dans cet ordre ; on ne remplace pas A^n par D^n.

Cas 5 · Suite affine : état stable et limite

Réflexe — $(I - A)C = B$; $V_n = U_n - C$ vérifie $V_{n+1} = AV_n$; $U_n = A^n(U_0 - C) + C$; si A^n tend vers O, U_n tend vers C.

Exemple. Question type : « Déterminer l'état stable, exprimer U_n, étudier la convergence ». Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 140 \\ 60 \end{pmatrix}$.

$(I - A)C = B$: $0{,}5x - 0{,}25y = 25$ et $-0{,}25x + 0{,}5y = 25$, d'où $x = y = 100$: $C = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$.

$V_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 40 \\ -40 \end{pmatrix}$ et $AV_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} = 0{,}25\,V_0$, donc $V_n = A^nV_0 = 0{,}25^n\,V_0$.

$u_n = 100 + 40 \times 0{,}25^n$ et $v_n = 100 - 40 \times 0{,}25^n$: (U_n) converge vers C.

Attention — si A^n tend vers O, la limite est C, pas la matrice nulle.

Les pièges

- La ligne i de A porte les coefficients de la i-ième équation.
- $U_n = A^nU_0$ seulement si B est nulle ; jamais $U_n = A^nU_0 + nB$.
- A^n ne s'obtient pas coefficient par coefficient, sauf pour une matrice diagonale.
- Une formule conjecturée pour A^n se démontre par récurrence.
- Sans état stable, la suite ne converge pas : on revient aux suites coordonnées.
- Une raison négative strictement comprise entre -1 et 1 donne aussi une limite nulle.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).