

## Devoir surveillé – Matrices — suites récurrentes et itération

Suites de matrices colonnes  $U(n+1) = AU(n) + B$  : puissances de  $A$ , expression de  $U(n)$ , état stable et convergence (thème « Graphes et matrices », Tle).

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Nom : \_\_\_\_\_ Date : \_\_\_\_\_ Note : \_\_\_\_\_ / 20

*Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.*

### Exercice 1 – Écriture matricielle et premiers termes (4 pts)

- a) Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  vérifient  $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n - 2 \\ v_{n+1} = -u_n + 4v_n + 1 \end{cases}$  avec  $u_0 = 1$  et  $v_0 = 2$ . Déterminer les matrices  $A$  et  $B$  telles que  $U_{n+1} = AU_n + B$ , où  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ .
- b) Calculer  $U_1$ .
- c) Calculer  $U_2$ .
- d) Calculer  $U_3$ .

### Exercice 2 – Puissance d'une matrice et terme général (4 pts)

- a) Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .
- b) Conjecturer l'expression de  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .
- c) Démontrer cette conjecture par récurrence.
- d) La suite  $(U_n)$  vérifie  $U_{n+1} = AU_n$  et  $U_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Exprimer  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ , puis déterminer leurs limites.

### Exercice 3 – État stable et convergence (4 pts)

- a) Soit  $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 17 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $U_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 30 \end{pmatrix}$  et  $U_{n+1} = AU_n + B$ .
- a) Démontrer que la relation admet un unique état stable et vérifier qu'il s'agit de  $C = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix}$ .
- b) On pose  $V_n = U_n - C$ . Démontrer que  $V_{n+1} = AV_n$  pour tout entier naturel  $n$ .
- c) Calculer  $V_0$  et  $V_1$ , puis en déduire  $U_1$ .
- d) On admet que tous les coefficients de  $A^n$  tendent vers 0. Déterminer  $\lim U_n$  et préciser si cette limite dépend de  $U_0$ .

**Exercice 4 – Calcul de  $A^n$  par diagonalisation***(4 pts)*

- a) Soit  $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ .  
 a) Vérifier que  $AP = PD$  et calculer  $P^{-1}$ .  
 b) En déduire que  $A = PDP^{-1}$ , puis que  $A^n = PD^nP^{-1}$  pour tout entier naturel  $n$ .  
 c) Donner l'expression des quatre coefficients de  $A^n$  en fonction de  $n$ .  
 d) La suite  $(U_n)$  vérifie  $U_{n+1} = AU_n$  et  $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Exprimer  $u_n$  et  $v_n$ , puis déterminer  $\lim \frac{u_n}{v_n}$ .

**Exercice 5 – Deux entrepôts d'une plateforme logistique***(4 pts)*

- a) Une plateforme dispose de deux entrepôts. Chaque semaine, l'entrepôt A conserve 80 % de ses palettes et en transfère 10 % vers l'entrepôt B, le reste étant expédié aux clients ; l'entrepôt B conserve 50 % de ses palettes et en transfère 30 % vers A, le reste étant expédié. Chaque semaine, 40 palettes arrivent en A et 50 en B. Initialement, A contient 700 palettes et B en contient 300. On note  $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$  l'état au bout de  $n$  semaines.  
 a) Déterminer  $A$  et  $B$  telles que  $U_{n+1} = AU_n + B$ .  
 b) Calculer  $U_1$ .  
 c) Déterminer l'état stable de cette évolution.  
 d) Un élève écrit : « puisque tous les coefficients de  $A^n$  tendent vers 0, la suite  $(U_n)$  tend vers la matrice nulle : les deux entrepôts finissent par se vider ». Expliquer l'erreur et donner la limite correcte.

*Bon courage !*