

Corrigé et barème – Matrices — suites récurrentes et itération

Suites de matrices colonnes $U(n+1) = AU(n) + B$: puissances de A , expression de $U(n)$, état stable et convergence (thème « Graphes et matrices », Tle).

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Écriture matricielle et premiers termes

(4 pts)

- a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, en lisant le système ligne par ligne. (1)
- b) $u_1 = 3 \times 1 + 2 - 2 = 3$ et $v_1 = -1 + 8 + 1 = 8$, donc $U_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$. (1)
- c) $u_2 = 9 + 8 - 2 = 15$ et $v_2 = -3 + 32 + 1 = 30$, donc $U_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \end{pmatrix}$. (1)
- d) $u_3 = 45 + 30 - 2 = 73$ et $v_3 = -15 + 120 + 1 = 106$, donc $U_3 = \begin{pmatrix} 73 \\ 106 \end{pmatrix}$. (1)

Le point clé — La matrice A se lit ligne par ligne à partir du système, la colonne B regroupant les seuls termes constants.

Exercice 2 – Puissance d'une matrice et terme général

(4 pts)

- a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4+12 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 16 & 9 \end{pmatrix}$ et $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 16+36 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 52 & 27 \end{pmatrix}$. (1)
- b) Les coefficients 4, 16, 52 valent $2(3^n - 1)$ pour $n = 1, 2, 3$: on conjecture $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2(3^n - 1) & 3^n \end{pmatrix}$. (1)
- c) Pour $n = 0$ la formule donne I . Si elle est vraie au rang n , $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2(3^n - 1) + 4 \times 3^n & 3^{n+1} \end{pmatrix}$, et $2 \times 3^n - 2 + 4 \times 3^n = 6 \times 3^n - 2 = 2(3^{n+1} - 1)$: la formule est vraie au rang $n + 1$, donc pour tout n . (1)
- d) $U_n = A^n U_0$ donne $u_n = 5$ et $v_n = 10(3^n - 1) - 3^n = 9 \times 3^n - 10$. Ainsi (u_n) est constante égale à 5 et $\lim v_n = +\infty$ car $3 > 1$. (1)

Erreur fréquente — Une conjecture lue sur A^2 et A^3 ne vaut rien sans récurrence, et l'initialisation doit être faite au rang 0, où l'on doit retrouver I .

Exercice 3 – État stable et convergence

(4 pts)

- a) $I - A = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,5 \\ -0,6 & 0,9 \end{pmatrix}$, de déterminant $0,72 - 0,30 = 0,42 \neq 0$: $I - A$ est inversible, l'état stable existe et est unique. Or $AC + B = \begin{pmatrix} 0,2 \times 40 + 0,5 \times 30 + 17 \\ 0,6 \times 40 + 0,1 \times 30 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix} = C$. (1)
- b) C vérifie $C = AC + B$, donc $V_{n+1} = U_{n+1} - C = (AU_n + B) - (AC + B) = A(U_n - C) = AV_n$. (1)
- c) $V_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_1 = AV_0 = \begin{pmatrix} 12 \\ 36 \end{pmatrix}$, d'où $U_1 = V_1 + C = \begin{pmatrix} 52 \\ 66 \end{pmatrix}$ (vérification directe : $AU_0 + B = \begin{pmatrix} 20 + 15 + 17 \\ 60 + 3 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ 66 \end{pmatrix}$). (1)
- d) $V_n = A^n V_0$ tend vers la matrice nulle, donc $\lim U_n = C = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix}$. Cette limite ne dépend pas de U_0 , qui ne fixe que l'écart initial à l'équilibre. (1)

À retenir — Le changement de suite $V_n = U_n - C$ efface la matrice B et ramène toute suite affine au cas homogène.

Exercice 4 – Calcul de A^n par diagonalisation

(4 pts)

- a) $AP = \begin{pmatrix} 7-3 & 21-6 \\ 2+2 & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ et $PD = \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$: égalité vérifiée. Comme $\det P = 2 - 3 = -1$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. (1)
- b) En multipliant $AP = PD$ à droite par P^{-1} : $A = PDP^{-1}$. Par récurrence, $A^{n+1} = PD^n P^{-1} \times PDP^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}$, l'initialisation donnant $PIP^{-1} = I = A^0$. (1)
- c) $PD^n = \begin{pmatrix} 4^n & 3 \times 5^n \\ 4^n & 2 \times 5^n \end{pmatrix}$, donc $A^n = \begin{pmatrix} -2 \times 4^n + 3 \times 5^n & 3 \times 4^n - 3 \times 5^n \\ -2 \times 4^n + 2 \times 5^n & 3 \times 4^n - 2 \times 5^n \end{pmatrix}$ (contrôle pour $n = 1$: on retrouve A). (1)
- d) $U_n = A^n U_0$ donne $u_n = -4^n + 3 \times 5^n$ et $v_n = -4^n + 2 \times 5^n$. En factorisant par 5^n : $\frac{u_n}{v_n} = \frac{3-(0,8)^n}{2-(0,8)^n}$, et $0,8^n \rightarrow 0$, donc $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{3}{2}$. (1)

Repère — Vérifier $AP = PD$ évite tout calcul d'inverse : l'inverse de P ne sert qu'au dernier produit.

Exercice 5 – Deux entrepôts d'une plateforme logistique

(4 pts)

- a) $a_{n+1} = 0,8a_n + 0,3b_n + 40$ et $b_{n+1} = 0,1a_n + 0,5b_n + 50$, donc $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix}$. (1)
- b) $a_1 = 560 + 90 + 40 = 690$ et $b_1 = 70 + 150 + 50 = 270$, donc $U_1 = \begin{pmatrix} 690 \\ 270 \end{pmatrix}$ palettes. (1)
- c) C vérifie $\begin{cases} 0,2x - 0,3y = 40 \\ -0,1x + 0,5y = 50 \end{cases}$. La seconde donne $x = 5y - 500$; en reportant : $0,2(5y - 500) - 0,3y = 40$, soit $0,7y = 140$, $y = 200$ et $x = 500$. L'état stable est $C = \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix}$. (1)
- d) La formule correcte est $U_n = A^n(U_0 - C) + C$, et non $U_n = A^n U_0$: la matrice B interdit d'utiliser la formule du cas homogène. Le facteur A^n n'efface que l'écart à l'équilibre, si bien que $\lim U_n = C = \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix}$: les stocks se stabilisent à 500 et 200 palettes, ils ne s'annulent pas. (1)

Attention — Dans le cas affine, $A^n \rightarrow 0$ signifie que l'écart à l'état stable disparaît, jamais que la suite tend vers zéro.