Matrices : définition et opérations

Fiche méthode

(Maths expertes Terminale · Graphes et matrices)

La démarche pour tout calcul matriciel

1. J'écris le format de chaque matrice (lignes × colonnes).

2. Je vérifie que l'opération existe : même format pour une somme, $(n \times p)(p \times q)$ pour un produit, matrice carrée pour une puissance.

3. Je calcule à la bonne place : coefficient par coefficient pour une somme, ligne du premier facteur × colonne du second pour un produit.

4. Je contrôle un coefficient au hasard, et je ne change jamais l'ordre des facteurs sans avoir prouvé que les matrices commutent.

Le réflexe — au moindre doute sur l'ordre, je garde l'ordre écrit : AB et BA sont deux calculs différents.

Cas 1 · Lire, écrire, modéliser une matrice

Réflexe — format = lignes × colonnes ; $a_{i\,j}$ = ligne i, colonne j ; un tableau à double entrée devient une matrice en gardant l'ordre.

Exemple. Questions types : « Donner le format et les coefficients », « Écrire la matrice définie par $a_{ij} = \ldots$ », « Traduire le tableau par une matrice ». Exemple : écrire la matrice A de format 2×3 telle que $a_{ij} = 3i - j$.

2 lignes ($i = 1$ ou 2), 3 colonnes ($j = 1$, 2 ou 3).

Ligne 1 : $3 - 1 = 2$, $3 - 2 = 1$, $3 - 3 = 0$. Ligne 2 : $6 - 1 = 5$, $6 - 2 = 4$, $6 - 3 = 3$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Attention — $a_{i\,j}$ et $a_{j\,i}$ ne sont pas le même coefficient ; deux formats différents ne donnent jamais deux matrices égales.

Cas 2 · Combiner des matrices, résoudre une équation

Réflexe — même format, coefficient par coefficient ; pour une équation, j'isole X comme avec des réels puis je vérifie.

Exemple. Questions types : « Calculer $2A - 3B$ », « Déterminer X telle que… ». Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, résoudre $3X - A = 2B$.

$3X - A = 2B$ équivaut à $3X = A + 2B$.

$A + 2B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

Donc $X = \frac{1}{3}(A + 2B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Vérification sur un coefficient : $3 \times 1 - 3 = 0 = 2 \times 0$.

Attention — $0 - (-3) = 3$: les signes des coefficients soustraits changent tous.

Cas 3 · Calculer un produit

Réflexe — (n × p)(p × q) : milieu égal, sinon le produit n'existe pas ; coefficient (i, j) = ligne i du premier × colonne j

du second.

Exemple. Questions types : « Le produit existe-t-il ? Donner son format, puis le calculer », « Image d'un point par une transformation ». Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

$(2 \times 3)(3 \times 2)$: AB existe, de format 2×2.
Ligne 1 : $1 \times 2 + (-2) \times (-3) + 3 \times 5 = 23$ et $1 \times 1 + (-2) \times 0 + 3 \times (-2) = -5$.
Ligne 2 : $4 \times 2 + 0 \times (-3) + (-1) \times 5 = 3$ et $4 \times 1 + 0 \times 0 + (-1) \times (-2) = 6$.
$AB = \begin{pmatrix} 23 & -5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Attention — on ne multiplie pas coefficient par coefficient ; $(2 \times 3)(2 \times 3)$ n'existe pas.

Cas 4 · Commuter, développer

Réflexe — je calcule AB et BA ; s'ils sont égaux, je peux développer comme avec des réels, sinon je garde AB + BA.

Exemple. Questions types : « Montrer que A et B commutent ; en déduire $(A+B)^2$ », « Déterminer les matrices qui commutent avec A ». Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$AB = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$: A et B commutent (normal : $B = A + I_2$).
Donc $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$.
$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 40 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}$, ce que confirme le calcul direct avec $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Attention — AB = O n'impose ni A = O ni B = O ; on ne simplifie pas AB = AC par A.

Cas 5 · Calculer A^n

Réflexe — diagonale : chaque coefficient diagonal à la puissance n ; sinon A^2, A^3, conjecture, récurrence avec $A^{n+1} = A^n \times A$.

Exemple. Questions types : « Calculer A^2, conjecturer A^n, démontrer par récurrence ». Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$. On conjecture $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = 2^{n-1}A$ » pour $n \geqslant 1$.
Initialisation : $2^0 A = A$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Hérédité : si $A^n = 2^{n-1}A$, alors $A^{n+1} = A^n \times A = 2^{n-1}A^2$ $= 2^{n-1} \times 2A = 2^n A$.
Conclusion : pour tout $n \geqslant 1$, $A^n = 2^{n-1}A$.

Attention — $A^0 = I_n$, pas O ; et $(AB)^2 = ABAB$, pas A^2B^2 en général.

Les pièges

- Format : toujours lignes × colonnes, comme les indices $a_{i\,j}$.
- Un produit impossible ne se « calcule » pas : vérifier les formats d'abord.
- Coefficient (i, j) de AB : ligne i de A, colonne j de B, jamais l'inverse.
- $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$; le 2AB n'apparaît que si A et B commutent.
- Une puissance ne se calcule terme à terme que pour une matrice diagonale.
- A puis B : la matrice de l'enchaînement est BA (la dernière transformation à gauche).

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).