

Devoir surveillé – Matrices — définition et opérations

Définir, lire et calculer avec des matrices carrées et rectangulaires : somme, produit, puissances et transposée (maths expertes, BO 2019).

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Somme, différence et équation matricielle

(4 pts)

- a) a) On pose $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $A + 2B$.
- b) b) Calculer $3A - B$.
- c) c) Déterminer la matrice X telle que $2X + A = B$.
- d) d) Déterminer le réel k tel que le coefficient de la ligne 1 et de la colonne 2 de $kA + B$ soit égal à 9, puis écrire la matrice $kA + B$ obtenue.

Exercice 2 – Produits et formats

(4 pts)

- a) a) On pose $U = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. Donner les formats de U , de V , puis ceux de UV et de VU .
- b) b) Calculer UV .
- c) c) Calculer la deuxième ligne de VU .
- d) d) Un élève affirme : « les deux produits existent, donc $UV = VU$ ». Expliquer son erreur.

Exercice 3 – Puissances d'une matrice

(4 pts)

- a) a) On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer B^2 et B^3 .
- b) b) Conjecturer l'expression de B^n pour tout entier naturel n .
- c) c) Démontrer cette conjecture par récurrence.
- d) d) Déterminer l'entier n pour lequel le coefficient de la ligne 2 et de la colonne 1 de B^n vaut -2028 .

Exercice 4 – Transposée et matrices symétriques

(4 pts)

- a) a) On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. Écrire tM et donner son format.
- b) b) Calculer $M \times {}^tM$.
- c) c) Démontrer, sans utiliser le calcul de la question b), que $M \times {}^tM$ est symétrique.
- d) d) Déterminer les réels x et y pour que la matrice $\begin{pmatrix} 4 & x+1 & 0 \\ 7 & -2 & y \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ soit symétrique.

Exercice 5 – Ventes de deux magasins*(4 pts)*

- a) Une enseigne vend trois articles A, B et C dans deux magasins. Les ventes hebdomadaires sont données par le premier tableau, le prix de vente et la marge unitaires, en euros, par le second.

	A	B	C
Magasin 1	40	25	60
Magasin 2	55	30	15

	Prix	Marge
A	18	6
B	45	21
C	9	3

- a) Écrire la matrice Q des ventes et la matrice P des prix et marges, en précisant leur format.
- b) Calculer QP .
- c) Interpréter le coefficient de la ligne 1 et de la colonne 2 de QP .
- d) Le magasin 1 veut porter sa marge hebdomadaire à 1 200 € en augmentant uniquement ses ventes de l'article C. Déterminer le nombre d'unités supplémentaires à vendre.

Bon courage !