

Corrigé et barème – Matrices — définition et opérations

Définir, lire et calculer avec des matrices carrées et rectangulaires : somme, produit, puissances et transposée (maths expertes, BO 2019).

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Somme, différence et équation matricielle

(4 pts)

- a) $2B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$, donc $A + 2B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$. (1)
- b) $3A = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$, donc $3A - B = \begin{pmatrix} 20 & -9 \\ -1 & 16 \end{pmatrix}$. (1)
- c) $2X = B - A = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, donc $X = \frac{1}{2}(B - A) = \begin{pmatrix} -4 & 1,5 \\ 1,5 & -3 \end{pmatrix}$. (1)
- d) Ce coefficient vaut $-3k + 0 = -3k$; $-3k = 9$ donne $k = -3$, et $-3A + B = \begin{pmatrix} -20 & 9 \\ 1 & -16 \end{pmatrix}$. (1)

Erreur fréquente — Une équation matricielle se résout comme une équation numérique, mais le coefficient $\frac{1}{2}$ multiplie tous les coefficients : aucun ne doit être oublié.

Exercice 2 – Produits et formats

(4 pts)

- a) U est de format 2×3 et V de format 3×2 ; UV est de format 2×2 et VU de format 3×3 . (1)
- b) Ligne 1 : $3 + 3 + 4 = 10$ et $6 + 0 - 8 = -2$; ligne 2 : $0 - 12 - 10 = -22$ et $0 + 0 + 20 = 20$. Donc $UV = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -22 & 20 \end{pmatrix}$. (1)
- c) La deuxième ligne de V est $(-3 ; 0)$: on obtient $(-9 ; 3 ; -6)$. (1)
- d) Les deux produits n'ont pas le même format (2×2 contre 3×3) : ils ne peuvent pas être égaux. L'existence des deux produits n'entraîne jamais leur égalité. (1)

Repère — Écrire $(n \times p)(p \times q) = (n \times q)$ avant tout calcul évite d'écrire un produit qui n'existe pas ou de se tromper de format.

Exercice 3 – Puissances d'une matrice

(4 pts)

- a) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^3 = B^2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 1 \end{pmatrix}$. (1)
- b) $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4n & 1 \end{pmatrix}$. (1)
- c) Initialisation : $B^0 = I_2$, qui correspond à $n = 0$. Hérédité : si $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4n & 1 \end{pmatrix}$, alors $B^{n+1} = B^nB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4n - 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4(n+1) & 1 \end{pmatrix}$. Conclusion : la propriété est vraie pour tout entier naturel n . (1)
- d) $-4n = -2028$ donne $n = 507$. (1)

Le point clé — Dans l'hérédité, on écrit $B^{n+1} = B^n \times B$ et l'on effectue réellement le produit : remplacer n par $n + 1$ dans la conjecture ne démontre rien.

Exercice 4 – Transposée et matrices symétriques*(4 pts)*

a) ${}^tM = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, de format 3×2 . (1)

b) $(2 \times 3)(3 \times 2)$ donne une matrice 2×2 : $4 + 1 + 9 = 14$, $0 - 5 - 6 = -11$, puis $0 + 25 + 4 = 29$.

Donc $M {}^tM = \begin{pmatrix} 14 & -11 \\ -11 & 29 \end{pmatrix}$. (1)

c) ${}^t(M {}^tM) = {}^t({}^tM) \times {}^tM = M \times {}^tM$: la matrice est égale à sa transposée, donc symétrique. (1)

d) La symétrie impose $x + 1 = 7$ et $y = 5$, soit $x = 6$ et $y = 5$. (1)

Attention — ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$: c'est le renversement de l'ordre qui fait réapparaître $M {}^tM$ à la question c).

Exercice 5 – Ventes de deux magasins*(4 pts)*

a) $Q = \begin{pmatrix} 40 & 25 & 60 \\ 55 & 30 & 15 \end{pmatrix}$ est de format 2×3 et $P = \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 45 & 21 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$ de format 3×2 . (1)

b) Ligne 1 : $720 + 1\,125 + 540 = 2\,385$ et $240 + 525 + 180 = 945$; ligne 2 : $990 + 1\,350 + 135 = 2\,475$ et $330 + 630 + 45 = 1\,005$. Donc $QP = \begin{pmatrix} 2\,385 & 945 \\ 2\,475 & 1\,005 \end{pmatrix}$, en euros. (1)

c) C'est la marge hebdomadaire totale du magasin 1, soit 945 €. (1)

d) Il manque $1\,200 - 945 = 255$ € de marge, et l'article C rapporte 3 € par unité : $255 \div 3 = 85$, soit 85 unités supplémentaires (donc 145 unités de C au total). (1)

Astuce — Chaque coefficient d'un produit matriciel doit s'interpréter : ligne = acteur (le magasin), colonne = grandeur (chiffre d'affaires ou marge).