Matrice inverse et systèmes

Fiche méthode

(Maths expertes Terminale · Graphes et matrices)

La démarche pour inverser une matrice ou résoudre un système

1. Je vérifie que la matrice est carrée : seule une matrice carrée peut être inversible.

2. Je décide de l'inversibilité : déterminant pour une matrice 2×2, pivot pour une matrice d'ordre 3, relation matricielle si l'énoncé en donne une.

3. Je calcule A^{-1}, puis, pour un système, $X = A^{-1}B$ avec le produit à gauche.

4. Je contrôle un coefficient de AA^{-1}, ou la solution dans une équation, et je conclus par une phrase.

Le réflexe — le calcul de A^{-1} ne vaut rien sans le contrôle : un coefficient de AA^{-1} suffit à repérer une erreur de signe.

Cas 1 · Prouver qu'une matrice est inversible

Réflexe — un seul produit $AB = I_n$ suffit ; une relation $A^2 + pA + qI_n = O$ $(q \neq 0)$ donne A^{-1} en factorisant par A.

Exemple. Questions types : « Montrer que B est l'inverse de A », « Montrer que $A^2 = 2A + 3I_2$; en déduire que A est inversible et donner A^{-1} ». Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $2A + 3I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$: la relation est vraie.

Elle s'écrit $A^2 - 2A = 3I_2$, soit $A(A - 2I_2) = 3I_2$, donc $A \times \frac{1}{3}(A - 2I_2) = I_2$.

A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Attention — on factorise par A en gardant I_2 : $A^2 - 2A = A(A - 2I_2)$, et non $A(A - 2)$.

Cas 2 · Inverser une matrice 2×2

Réflexe — $\det(A) = ad - bc$; s'il est non nul : diagonale échangée, autres coefficients changés de signe, le tout divisé par $\det(A)$.

Exemple. Questions types : « Montrer que D est inversible et calculer D^{-1} », « Pour quelles valeurs de k la matrice est-elle inversible ? ». Exemple : $D = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

$\det(D) = 7 \times 3 - 4 \times 5 = 21 - 20 = 1$.

Comme $\det(D) \neq 0$, D est inversible et $D^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$.

Contrôle : coefficient en haut à gauche de DD^{-1}, $7 \times 3 + 4 \times (-5) = 1$.

Attention — on change le signe de b et de c sans les échanger ; $\det(A) = ad - bc$, avec un moins.

Cas 3 · Inverser une matrice d'ordre 3 par le pivot

Réflexe — tableau $(A \mid I_3)$; zéros sous la diagonale, pivots ramenés à 1, zéros au-dessus ; mêmes opérations des deux

côtés.

Exemple. Question type : « Déterminer N^{-1} par la méthode du pivot ». Exemple : $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: $(0\ \ 1\ \ -2 \mid -2\ \ 1\ \ 0)$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: $(0\ \ 1\ \ 0 \mid -1\ \ 0\ \ 1)$.
$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$: $(0\ \ 0\ \ 2 \mid 1\ \ -1\ \ 1)$, puis on divise par 2. On remonte : $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$.
$N^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Attention — une ligne nulle à gauche : la matrice n'est pas inversible, on s'arrête.

Cas 4 · Résoudre AX = B avec A inversible

Réflexe — j'écris A, X, B ; A inversible donc X = A⁻¹B ; je vérifie dans une équation et je conclus par un couple ou un triplet.

Exemple. Question type : « Écrire le système sous la forme $AX = B$ et le résoudre ». Exemple : $\begin{cases} 7x + 4y = 26 \\ 5x + 3y = 19 \end{cases}$

$A = D = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ (cas 2), $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 26 \\ 19 \end{pmatrix}$. Comme $\det(D) = 1 \neq 0$, D est inversible.
$X = D^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 26 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 - 76 \\ -130 + 133 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
L'unique solution est le couple $(2\,;3)$; contrôle : $5 \times 2 + 3 \times 3 = 19$.

Attention — X = A⁻¹B, jamais BA⁻¹ ; et YA = C donne Y = CA⁻¹.

Cas 5 · Conclure quand det(A) = 0

Réflexe — je combine les équations comme les lignes de A ; égalité fausse : aucune solution ; égalité vraie : une infinité, paramétrée par t.

Exemple. Question type : « Le système admet-il une unique solution ? Le résoudre. » Exemple : $\begin{cases} 3x - 6y = 5 \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$

$\det(A) = 3 \times 2 - (-6) \times (-1) = 0$: A n'est pas inversible.
En multipliant la seconde équation par -3 : $3x - 6y = -21$. Or la première impose $3x - 6y = 5$.
Comme $5 \neq -21$, le système n'a aucune solution.

Attention — det(A) = 0 ne dit pas « aucune solution » : il faut comparer les seconds membres.

Les pièges

- Seule une matrice carrée peut être inversible.
- det(A) = ad − bc : on soustrait le produit des coefficients b et c.
- Inverse 2 × 2 : on échange a et d, on change le signe de b et c, on divise par det(A).
- (AB)⁻¹ = B⁻¹A⁻¹ : l'ordre s'inverse.
- Une inconnue absente d'une équation donne un coefficient 0 dans A.
- Un système linéaire a 0, 1 ou une infinité de solutions, jamais exactement 2.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).