

Devoir surveillé – Matrices — matrice inverse et résolution de systèmes

Déterminant, inverse d'une matrice 2×2 et 3×3 , écriture matricielle $AX = B$ et résolution des systèmes linéaires (thème « Graphes et matrices », maths expertes Tle).

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Déterminants et inverses

(4 pts)

- a) a) Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$ et dire si A est inversible.
- b) b) La matrice $C = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Justifier.
- c) c) Calculer l'inverse de $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.
- d) d) Déterminer toutes les valeurs du réel k pour lesquelles $E = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 8 & k \end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice 2 – Résolution matricielle d'un système

(4 pts)

- a) On considère le système $(S) : \begin{cases} 6x + 5y = 3 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$
 - a) Écrire (S) sous la forme $AX = B$.
- b) b) Calculer $\det(A)$ et en déduire que (S) admet une unique solution.
- c) c) Calculer A^{-1} .
- d) d) Résoudre (S) , puis vérifier le résultat dans la deuxième équation.

Exercice 3 – Inverse d'une matrice 3×3

(4 pts)

- a) On pose $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a) Justifier, sans calcul de pivot, que T est inversible.
- b) b) Déterminer T^{-1} par la méthode du pivot.
- c) c) Calculer la première ligne du produit TT^{-1} et commenter.
- d) d) En déduire la solution du système $TX = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 – Discussion selon un paramètre*(4 pts)*

- a) Soit m un réel et $(S_m) : \begin{cases} 2x + my = 1 \\ mx + 8y = 2 \end{cases}$
- a) Exprimer le déterminant de la matrice de (S_m) en fonction de m .
- b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (S_m) admet une unique solution.
- c) Résoudre (S_m) pour $m = 4$.
- d) Résoudre (S_m) pour $m = -4$.

Exercice 5 – Billetterie d'un festival*(4 pts)*

- a) Un festival vend 100 billets d'un concert en trois catégories : plein tarif à 20 euros, tarif réduit à 12 euros et tarif scolaire à 8 euros. La recette totale s'élève à 1 520 euros et le nombre de billets plein tarif est égal à la somme des billets à tarif réduit et à tarif scolaire. On note x , y et z les nombres de billets de chaque catégorie.
- a) Traduire l'énoncé par un système de trois équations, puis l'écrire sous la forme $AX = B$.
- b) Montrer que A est inversible.
- c) Déterminer le nombre de billets vendus dans chaque catégorie.
- d) Un élève écrit que la solution est $X = BA^{-1}$. Expliquer l'erreur.

Bon courage !