

Corrigé et barème – Matrices — matrice inverse et résolution de systèmes

Déterminant, inverse d'une matrice 2×2 et 3×3 , écriture matricielle $AX = B$ et résolution des systèmes linéaires (thème « Graphes et matrices », maths expertes Tle).

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Déterminants et inverses

(4 pts)

- a) $\det(A) = 7 \times 3 - 2 \times 10 = 21 - 20 = 1 \neq 0$: A est inversible. (1)
- b) $\det(C) = (-3)(-10) - 5 \times 6 = 30 - 30 = 0$: C n'est pas inversible (ses lignes sont proportionnelles). (1)
- c) $\det(D) = 9 - 8 = 1$, donc $D^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. (1)
- d) $\det(E) = k^2 - 16$, qui s'annule pour $k = 4$ et $k = -4$: E est inversible pour tout k tel que $k \neq 4$ et $k \neq -4$. (1)

Erreur fréquente — Le produit de deux nombres négatifs est positif : dans le calcul d'un déterminant, on écrit les parenthèses avant de conclure.

Exercice 2 – Résolution matricielle d'un système

(4 pts)

- a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. (1)
- b) $\det(A) = 24 - 25 = -1 \neq 0$: A est inversible, donc (S) admet une unique solution $X = A^{-1}B$. (1)
- c) $A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$. (1)
- d) $X = \begin{pmatrix} -12 + 5 \\ 15 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}$: l'unique solution est $(-7; 9)$. Vérification : $5 \times (-7) + 4 \times 9 = -35 + 36 = 1$. (1)

Le point clé — Un déterminant négatif change le signe des quatre coefficients de l'inverse : on divise par -1 , on ne l'oublie pas.

Exercice 3 – Inverse d'une matrice 3×3

(4 pts)

- a) T est triangulaire supérieure et ses trois coefficients diagonaux valent 1, tous non nuls : T est inversible. (1)
- b) À partir de $(T | I_3)$: $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3$ donne $(0 \ 1 \ 0 \ | \ 0 \ 1 \ -4)$; $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$ donne $(1 \ 2 \ 0 \ | \ 1 \ 0 \ -3)$; puis $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ donne $(1 \ 0 \ 0 \ | \ 1 \ -2 \ 5)$. Donc $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (1)
- c) Première ligne : $(1; -2 + 2; 5 - 8 + 3) = (1; 0; 0)$, c'est bien la première ligne de I_3 : le calcul est confirmé. (1)
- d) $X = T^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 12 + 10 \\ 6 - 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$: l'unique solution est le triplet $(2; -2; 2)$. (1)

Repère — Sur une matrice triangulaire, le pivot se fait de bas en haut : on part du dernier pivot pour vider la colonne au-dessus.

Exercice 4 – Discussion selon un paramètre

(4 pts)

- a) La matrice est $\begin{pmatrix} 2 & m \\ m & 8 \end{pmatrix}$, de déterminant $2 \times 8 - m \times m = 16 - m^2$. (1)
- b) $16 - m^2 \neq 0$ équivaut à $m \neq 4$ et $m \neq -4$: pour toutes ces valeurs, (S_m) admet une unique solution. (1)
- c) Pour $m = 4$: $\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 4x + 8y = 2 \end{cases}$ La seconde équation est le double de la première, donc le système se réduit à $2x + 4y = 1$. En posant $y = t$, $x = \frac{1-4t}{2}$: il y a une infinité de solutions, les couples $(\frac{1-4t}{2}; t)$. (1)
- d) Pour $m = -4$: $\begin{cases} 2x - 4y = 1 \\ -4x + 8y = 2 \end{cases}$ En multipliant la première équation par -2 , on obtient $-4x + 8y = -2$, incompatible avec $-4x + 8y = 2$. Le système n'a aucune solution. (1)

Attention — Deux valeurs interdites du paramètre donnent deux situations différentes : l'une une infinité de solutions, l'autre aucune.

Exercice 5 – Billetterie d'un festival

(4 pts)

- a) $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 20x + 12y + 8z = 1520 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ soit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 20 & 12 & 8 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 100 \\ 1520 \\ 0 \end{pmatrix}$. (1)
- b) En développant selon la première ligne : $\det(A) = (-12 + 8) - (-20 - 8) + (-20 - 12) = -4 + 28 - 32 = -8 \neq 0$, donc A est inversible et le système admet une unique solution. (1)
- c) En ajoutant la première et la troisième équation : $2x = 100$, donc $x = 50$, puis $y + z = 50$. La deuxième équation devient $12y + 8z = 1520 - 1000 = 520$, soit $3y + 2z = 130$. Avec $y = 50 - z$: $150 - 3z + 2z = 130$, d'où $z = 20$ et $y = 30$. Le festival a vendu 50 billets plein tarif, 30 à tarif réduit et 20 à tarif scolaire (recette : $1000 + 360 + 160 = 1520$ euros). (1)
- d) Le produit BA^{-1} n'existe pas : B est de taille 3×1 et A^{-1} de taille 3×3 , le nombre de colonnes de B ne correspond pas au nombre de lignes de A^{-1} . De plus le produit matriciel n'est pas commutatif : partant de $AX = B$, on multiplie les deux membres à gauche par A^{-1} , ce qui donne $X = A^{-1}B$. (1)

À retenir — Avant d'écrire un produit de matrices, on vérifie les formats : le nombre de colonnes de la première doit évaluer le nombre de lignes de la seconde.