

Devoir surveillé – Graphes — vocabulaire et propriétés

Sommets, arêtes, chemins, cycles et connexité : les fondamentaux de la théorie des graphes (programme de Maths expertes Tle)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Vocabulaire et lemme des poignées de main

(4 pts)

a) On considère le graphe décrit par le tableau suivant.

Sommet	A	B	C	D	E	F
Voisins	B, C, F	A, C, D	A, B, D	B, C, E	D, F	A, E

- a) Donner l'ordre du graphe et la liste de ses arêtes.
 b) Donner le degré de chaque sommet, puis vérifier le lemme des poignées de main.
 c) Le graphe est-il complet ? Justifier.
 d) Ce graphe possède-t-il un sous-graphe complet d'ordre 4 ? Justifier soigneusement.

Exercice 2 – Graphe orienté

(4 pts)

- a) Cinq tâches X, Y, Z, T, U s'enchaînent selon les arcs : $X \rightarrow Y$, $X \rightarrow Z$, $Y \rightarrow Z$, $Z \rightarrow T$, $T \rightarrow X$, $T \rightarrow U$ et $U \rightarrow Y$.
 a) Donner le degré entrant et le degré sortant de chaque sommet.
 b) Calculer la somme des degrés entrants et celle des degrés sortants, puis interpréter.
 c) Donner un circuit de longueur 3, puis un circuit de longueur 4.
 d) Existe-t-il un sommet sans prédécesseur, c'est-à-dire de degré entrant nul ? Justifier.

Exercice 3 – Chaîne eulérienne dans une exposition

(4 pts)

- a) Les salles d'une exposition sont reliées par des passages : PQ, PR, PS, QR, QT, RU, ST et TU.
 a) Justifier que le graphe est connexe.
 b) Déterminer le degré de chaque salle et le nombre de passages.
 c) Un visiteur peut-il emprunter chaque passage une fois et une seule ? Justifier.
 d) Indiquer un passage à condamner pour qu'un tel parcours devienne possible, en préciser les extrémités, et donner un parcours explicite.

Exercice 4 – Coloration d'un planning*(4 pts)*

- a) Sept ateliers sont incompatibles deux à deux selon le graphe suivant.

Atelier	a	b	c	d	e	f	g
Incompatible avec	b, c, d	a, c, e	a, b, d, f	a, c, g	b, f	c, e, g	d, f

- a) Déterminer le nombre d'arêtes et le degré maximal Δ .
- b) Montrer que le nombre chromatique est supérieur ou égal à 3.
- c) Proposer une coloration à 3 couleurs et conclure sur la valeur du nombre chromatique.
- d) Un élève affirme : « il y a 10 incompatibilités, il faut donc 10 créneaux ». Expliquer son erreur et donner le nombre minimal de créneaux.

Exercice 5 – Raisonnements sur les degrés*(4 pts)*

- a) Dans un tournoi, 9 équipes doivent chacune affronter exactement 5 autres équipes. Cette situation est-elle possible ? Justifier.
- b) Un graphe d'ordre 16 a tous ses sommets de degré 7. Déterminer son nombre d'arêtes.
- c) Démontrer que, dans tout graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair.
- d) Un élève affirme : « un graphe qui admet un cycle eulérien admet aussi une chaîne eulérienne non fermée ». Expliquer son erreur.

Bon courage !