

Corrigé et barème – Graphes — vocabulaire et propriétés

Sommets, arêtes, chemins, cycles et connexité : les fondamentaux de la théorie des graphes (programme de Maths expertes Tle)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Vocabulaire et lemme des poignées de main

(4 pts)

- Ordre 6 ; arêtes AB, AC, AF, BC, BD, CD, DE, EF, soit 8 arêtes. (1)
- $d(A) = 3, d(B) = 3, d(C) = 3, d(D) = 3, d(E) = 2, d(F) = 2$; somme = $16 = 2 \times 8$: le lemme est vérifié. (1)
- Non : dans K_6 chaque sommet serait de degré 5, or $d(E) = 2$ (et A n'est pas adjacent à D). (1)
- Non : les quatre sommets d'un K_4 sont de degré au moins 3, ce qui exclut E et F ; il ne resterait que $\{A, B, C, D\}$, mais A et D ne sont pas adjacents. (1)

Le point clé — Un graphe se lit d'abord par ses degrés : ils donnent le nombre d'arêtes et interdisent bien des configurations.

Exercice 2 – Graphe orienté

(4 pts)

- Sortants : X 2, Y 1, Z 1, T 2, U 1. Entrants : X 1, Y 2, Z 2, T 1, U 1. (1)
- Les deux sommes valent 7, soit le nombre d'arcs : chaque arc est compté une fois à son origine et une fois à son extrémité. (1)
- $X \rightarrow Z \rightarrow T \rightarrow X$ est de longueur 3 ; $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow T \rightarrow X$ est de longueur 4. (1)
- Non : chaque sommet a un degré entrant au moins égal à 1 (X reçoit de T, Y de X et U, Z de X et Y, T de Z, U de T). (1)

Repère — Dans un graphe orienté, la somme des degrés entrants vaut le nombre d'arcs, et non son double.

Exercice 3 – Chaîne eulérienne dans une exposition

(4 pts)

- Toute salle est reliée à P : P-Q, P-R, P-S, P-R-U et P-Q-T ; le graphe est donc connexe. (1)
- $d(P) = 3, d(Q) = 3, d(R) = 3, d(S) = 2, d(T) = 3, d(U) = 2$; somme = 16, donc $m = 8$ passages. (1)
- Non : il y a quatre salles de degré impair (P, Q, R, T), alors que le théorème d'Euler en exige zéro ou exactement deux. (1)
- En condamnant PQ, seules R et T restent de degré impair : parcours R-P-S-T-U-R-Q-T, qui emprunte PR, PS, ST, TU, RU, QR, QT (7 passages). (1)

Erreur fréquente — Condamner une arête ne change la parité que de ses deux extrémités : c'est ce qui guide le choix du passage à supprimer.

Exercice 4 – Coloration d'un planning

(4 pts)

- Degrés : a 3, b 3, c 4, d 3, e 2, f 3, g 2 ; somme = 20, donc $m = 10$ arêtes et $\Delta = 4$. (1)
- a, b et c sont deux à deux incompatibles : ce triangle impose trois couleurs distinctes, d'où $\chi \geq 3$. (1)
- $a \rightarrow 1, b \rightarrow 2, c \rightarrow 3, d \rightarrow 2, e \rightarrow 1, f \rightarrow 2, g \rightarrow 1$: les 10 arêtes relient des couleurs différentes, donc $\chi = 3$. (1)
- Le nombre d'arêtes ne fixe pas le nombre de couleurs : des ateliers non reliés partagent un créneau. Il faut 3 créneaux, par exemple $\{a, e, g\}$, $\{b, d, f\}$ et $\{c\}$. (1)

Astuce — Un triangle repéré dans le graphe suffit souvent à refermer l'encadrement $\omega \leq \chi \leq \Delta + 1$.

Exercice 5 – Raisonnements sur les degrés*(4 pts)*

- a) Non : la somme des degrés vaudrait $9 \times 5 = 45$, un nombre impair, alors qu'elle doit être égale à $2m$. (1)
- b) Somme des degrés $= 16 \times 7 = 112$, donc $m = 112/2 = 56$ arêtes. (1)
- c) La somme des degrés est paire ; celle des degrés pairs l'est aussi, donc la somme des degrés impairs est paire, ce qui impose un nombre pair de tels sommets. (1)
- d) Un cycle eulérien impose que tous les degrés soient pairs, donc zéro sommet de degré impair ; or une chaîne non fermée en exige exactement deux : les deux situations s'excluent. (1)

À retenir — La parité de la somme des degrés est l'argument le plus rentable du chapitre : elle prouve des impossibilités en deux lignes.