Graphes probabilistes et chaînes de Markov

Fiche méthode

(Maths expertes Terminale · Graphes et matrices · Chaînes de Markov)

La démarche pour étudier une chaîne de Markov

1. Je fixe l'ordre des états et j'écris la matrice de transition P ligne par ligne (une ligne = un état de départ), en contrôlant que chaque ligne somme à 1.

2. Je calcule les distributions : π_0 en ligne, puis $\pi_{n+1} = \pi_n P$ ou directement $\pi_n = \pi_0 P^n$.

3. Je cherche la distribution invariante : $\pi P = \pi$ et somme des coefficients égale à 1.

4. Je conclus sur le long terme : suite arithmético-géométrique à deux états, résultat admis à trois états, en vérifiant l'hypothèse.

Le réflexe — chaque résultat se justifie par une règle nommée : « d'après la formule des probabilités totales », « par récurrence », « comme $-1 < q < 1$ ». Un calcul sans justification risque de ne pas rapporter tous les points.

Cas 1 · Une relation de récurrence par un arbre

Réflexe — arbre entre l'étape n et l'étape n + 1, puis probabilités totales : $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta(1 - a_n)$.

Exemple. Questions types : « Recopier et compléter l'arbre », « Montrer que $a_{n+1} = \ldots$ ». Exemple : un appareil est allumé (A_n) ou éteint ; $p_{A_n}(A_{n+1}) = 0{,}6$ et $p_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0{,}1$.

A_n et $\overline{A_n}$ forment une partition. D'après la formule des probabilités totales :

$a_{n+1} = 0{,}6\,a_n + 0{,}1\,(1 - a_n) = 0{,}5\,a_n + 0{,}1$.

Point fixe : $\ell = 0{,}5\,\ell + 0{,}1$, donc $\ell = 0{,}2$; puis $a_n = 0{,}2 + (a_0 - 0{,}2) \times 0{,}5^n$.

Attention — les poids du second niveau sont des probabilités conditionnelles ; ce sont les branches issues d'un même nœud qui somment à 1.

Cas 2 · Écrire la matrice de transition

Réflexe — ordre des états écrit ; ligne i = flèches qui partent de i ; flèche absente = 0 ; boucle = complément à 1.

Exemple. Questions types : « Représenter la situation par un graphe probabiliste », « Écrire la matrice de transition ». Exemple : de 1, on va en 2 avec la probabilité 0,4 ; de 2, en 1 avec 0,15 et en 3 avec 0,3 ; de 3, en 1 avec 0,2 ; sinon on reste.

Boucles : $1 - 0{,}4 = 0{,}6$; $1 - 0{,}15 - 0{,}3 = 0{,}55$; $1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Dans l'ordre $(1\,;2\,;3)$: $P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}15 & 0{,}55 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

Contrôle : chaque ligne somme à 1.

Attention — p_{21} est la probabilité de passer de 2 à 1 ; ce sont les lignes, jamais les colonnes, qui somment à 1.

Cas 3 · Distribution après n transitions, coefficient de P^n

Réflexe — $\pi_{n+1} = \pi_n P$, ligne à gauche ; départ connu en i : ligne i de P^n.

Exemple. Questions types : « Calculer π_2 », « Interpréter le coefficient $(2\,;1)$ de P^2 », « Démontrer que $\pi_n = \pi_0 P^n$ ». Exemple : $P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

$\pi_1 = \pi_0 P = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \end{pmatrix}$, puis $\pi_2 = \pi_1 P$, de premier coefficient $0{,}65 \times 0{,}9 + 0{,}35 \times 0{,}4 = 0{,}725$:
$\pi_2 = \begin{pmatrix} 0{,}725 & 0{,}275 \end{pmatrix}$.
$(P^2)_{21} = 0{,}4 \times 0{,}9 + 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}6$: probabilité de passer de l'état 2 à l'état 1 en deux transitions.
Récurrence : $\pi_{k+1} = \pi_k P = \pi_0 P^k P = \pi_0 P^{k+1}$.

Attention — $P\pi_n$ n'a pas de sens ; et $(P^n)_{i\,j}$ n'est pas $(p_{i\,j})^n$.

Cas 4 · Distribution invariante

Réflexe — $\pi = (x\ 1-x)$ à deux états ; à trois états, deux équations de $\pi P = \pi$ et $x + y + z = 1$.

Exemple. Questions types : « Déterminer la distribution invariante », « Vérifier que π est invariante ». Exemple : $P = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$.

On pose $\pi = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}$. Le premier coefficient de πP vaut $0{,}65x + 0{,}15(1-x) = 0{,}5x + 0{,}15$.
$0{,}5x + 0{,}15 = x \iff 0{,}5x = 0{,}15 \iff x = 0{,}3$.
$\pi = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$; contrôle : $0{,}3 \times 0{,}35 + 0{,}7 \times 0{,}85 = 0{,}7$.

Attention — sans la condition « somme égale à 1 », le système a une infinité de solutions.

Cas 5 · Limite et seuil

Réflexe — $x_{n+1} = (p_{11} - p_{21})x_n + p_{21}$; point fixe, suite géométrique, limite si $-1 < q < 1$.

Exemple. Questions types : « Montrer que (u_n) est géométrique », « En déduire la limite de (π_n) », « Déterminer le premier rang tel que… ». Exemple : $P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ et $x_0 = 1$.

$x_{n+1} = 0{,}4\,x_n + 0{,}3\,(1 - x_n) = 0{,}1\,x_n + 0{,}3$; point fixe $\ell = \dfrac{0{,}3}{0{,}9} = \dfrac{1}{3}$.
$x_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times 0{,}1^n$; comme $-1 < 0{,}1 < 1$, $\lim x_n = \dfrac{1}{3}$: (π_n) converge vers $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.
$x_n < 0{,}334 \iff 0{,}1^n < 0{,}001$: premier rang $n = 4$.

Attention — un invariant qui existe ne prouve pas la convergence : on vérifie l'hypothèse ($0 < a + b < 2$, coefficients strictement positifs).

Les pièges

- Ligne = départ, colonne = arrivée : p_{21} part de l'état 2.
- Ce sont les lignes de P qui somment à 1, jamais les colonnes.
- La distribution est une ligne à gauche : $\pi_n P$, pas $P\pi_n$.
- Le coefficient (i ; j) de P^n n'est pas la puissance n-ième de $p_{i\,j}$.
- Sans « $x + y + z = 1$ », la distribution invariante n'est pas déterminée.
- $P = (0\ 1\ ;\ 1\ 0)$ a une distribution invariante, mais π_n ne converge pas.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).