

Devoir surveillé – Graphes probabilistes et chaînes de Markov

Modélisation de phénomènes aléatoires évolutifs par des graphes probabilistes et des matrices de transition (programme Maths expertes Tle)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Lecture d'un graphe probabiliste

(4 pts)

- a) Un centre de loisirs propose chaque jour deux activités : le sport (S) ou l'atelier créatif (A). Un enfant inscrit au sport un jour donné se réinscrit au sport le lendemain avec la probabilité 0,55 ; un enfant inscrit à l'atelier choisit le sport le lendemain avec la probabilité 0,35. Les états sont rangés dans l'ordre (S ; A). Écrire la matrice de transition T et vérifier que chaque ligne somme à 1.
- b) Le premier jour, la répartition des enfants est donnée par le tableau suivant.

Activité	S	A
Proportion	0,6	0,4

Écrire la distribution P_0 , puis calculer P_1 .

- c) Calculer P_2 .
- d) Interpréter, dans le contexte de l'exercice, le coefficient situé à la ligne 2, colonne 1 de T .

Exercice 2 – État stable

(4 pts)

- a) Une chaîne de Markov à deux états a pour matrice de transition $T = \begin{pmatrix} 0,91 & 0,09 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix}$. On cherche une distribution invariante de la forme $P = (p \ 1 - p)$. Montrer que P est un état stable si et seulement si $0,48p = 0,39$.
- b) En déduire la valeur exacte de P , sous forme de fractions irréductibles.
- c) Donner une valeur approchée de P à 10^{-3} près.
- d) Justifier que la suite (P_n) converge vers P , quelle que soit la distribution initiale.

Exercice 3 – Suite auxiliaire et seuil

(4 pts)

- a) Un système à deux états a pour matrice de transition $T = \begin{pmatrix} 0,89 & 0,11 \\ 0,44 & 0,56 \end{pmatrix}$ et pour distribution initiale $P_0 = (0,1 \ 0,9)$. On note p_n la première coordonnée de P_n . Montrer que pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,45p_n + 0,44$.
- b) On pose $u_n = p_n - 0,8$. Démontrer que (u_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
- c) En déduire l'expression de p_n en fonction de n , puis la limite de (p_n) .
- d) Déterminer le plus petit entier n tel que $p_n > 0,79$.

Exercice 4 – Chaîne à trois états*(4 pts)*

- a) Un système possède trois états 1, 2 et 3, de matrice de transition $T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$ et de distribution initiale $P_0 = (0,5 \ 0,3 \ 0,2)$. Calculer P_1 .
- b) Calculer P_2 .
- c) Vérifier que la distribution $Q = (0,2 \ 0,5 \ 0,3)$ est un état stable de cette chaîne.
- d) La suite (P_n) converge-t-elle vers Q ? Justifier.

Exercice 5 – Convergence et raison négative*(4 pts)*

- a) Une chaîne de Markov à deux états a pour matrice de transition $T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$. Déterminer son état stable.
- b) Calculer T^2 .
- c) On prend $P_0 = (1 \ 0)$. Exprimer p_n , première coordonnée de P_n , en fonction de n , puis donner p_3 .
- d) Un élève affirme : « les coefficients de P_n passent au-dessus puis au-dessous de la limite, donc la suite (P_n) ne converge pas ». Expliquer son erreur.

Bon courage !