

Corrigé et barème – Graphes probabilistes et chaînes de Markov

Modélisation de phénomènes aléatoires évolutifs par des graphes probabilistes et des matrices de transition (programme Maths expertes Tle)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Lecture d'un graphe probabiliste

(4 pts)

- $T = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$; $0,55 + 0,45 = 1$ et $0,35 + 0,65 = 1$. (1)
- $P_0 = (0,6 \ 0,4)$; $P_1 = (0,6 \times 0,55 + 0,4 \times 0,35 \quad 0,6 \times 0,45 + 0,4 \times 0,65) = (0,33 + 0,14 \quad 0,27 + 0,26) = (0,47 \ 0,53)$. (1)
- $P_2 = (0,47 \times 0,55 + 0,53 \times 0,35 \quad 0,47 \times 0,45 + 0,53 \times 0,65) = (0,2585 + 0,1855 \quad 0,2115 + 0,3445) = (0,444 \ 0,556)$. (1)
- Le coefficient 0,35 est la probabilité qu'un enfant inscrit à l'atelier un jour donné choisisse le sport le lendemain. (1)

Repère — Dans la matrice de transition, la ligne est l'état de départ et la colonne l'état d'arrivée : une ligne qui ne somme pas à 1 trahit une lecture inversée.

Exercice 2 – État stable

(4 pts)

- La première coordonnée de $P \times T$ vaut $0,91p + 0,39(1 - p) = 0,52p + 0,39$. L'égalité $P \times T = P$ équivaut à $0,52p + 0,39 = p$, soit $0,48p = 0,39$. (1)
- $p = \frac{0,39}{0,48} = \frac{39}{48} = \frac{13}{16}$ et $1 - p = \frac{3}{16}$, donc $P = \left(\frac{13}{16} \ \frac{3}{16}\right)$. (1)
- $\frac{13}{16} = 0,8125$ et $\frac{3}{16} = 0,1875$, donc $P \approx (0,813 \ 0,188)$. (1)
- Les quatre coefficients de T sont strictement positifs : le théorème de convergence des graphes probabilistes d'ordre 2 s'applique, la limite étant l'unique état stable, indépendante de P_0 . (1)

Le point clé — Poser $P = (p \ 1 - p)$ intègre d'emblée la condition « somme égale à 1 » et ramène l'état stable à une seule équation du premier degré.

Exercice 3 – Suite auxiliaire et seuil

(4 pts)

- $p_{n+1} = 0,89p_n + 0,44(1 - p_n) = 0,89p_n + 0,44 - 0,44p_n = 0,45p_n + 0,44$. (1)
- $u_{n+1} = 0,45p_n + 0,44 - 0,8 = 0,45p_n - 0,36 = 0,45(p_n - 0,8) = 0,45u_n$: (u_n) est géométrique de raison 0,45, de premier terme $u_0 = 0,1 - 0,8 = -0,7$. (1)
- $u_n = -0,7 \times 0,45^n$, donc $p_n = 0,8 - 0,7 \times 0,45^n$; comme $0 < 0,45 < 1$, $\lim p_n = 0,8$. (Contrôle : $p_1 = 0,89 \times 0,1 + 0,44 \times 0,9 = 0,485$ et $0,8 - 0,7 \times 0,45 = 0,485$.) (1)
- $p_n > 0,79 \iff 0,7 \times 0,45^n < 0,01 \iff 0,45^n < \frac{1}{70} \approx 0,01429$. Or $0,45^5 \approx 0,01845$ et $0,45^6 \approx 0,00830$, donc $n = 6$. (1)

Erreur fréquente — La raison de la suite auxiliaire est $t_{11} - t_{21}$, et non t_{11} : oublier de soustraire fausse à la fois l'expression de p_n et le seuil.

Exercice 4 – Chaîne à trois états

(4 pts)

- a) $P_1 = (0,5 \times 0,6 + 0,3 \times 0,1 + 0,2 \times 0,1 \quad 0,5 \times 0,3 + 0,3 \times 0,7 + 0,2 \times 0,3 \quad 0,5 \times 0,1 + 0,3 \times 0,2 + 0,2 \times 0,6) = (0,35 \quad 0,42 \quad 0,23)$. (1)
- b) $P_2 = (0,35 \times 0,6 + 0,42 \times 0,1 + 0,23 \times 0,1 \quad 0,35 \times 0,3 + 0,42 \times 0,7 + 0,23 \times 0,3 \quad 0,35 \times 0,1 + 0,42 \times 0,2 + 0,23 \times 0,6) = (0,275 \quad 0,468 \quad 0,257)$. (1)
- c) $Q \times T : 0,2 \times 0,6 + 0,5 \times 0,1 + 0,3 \times 0,1 = 0,2 ; 0,2 \times 0,3 + 0,5 \times 0,7 + 0,3 \times 0,3 = 0,5 ; 0,2 \times 0,1 + 0,5 \times 0,2 + 0,3 \times 0,6 = 0,3$. Donc $Q \times T = Q$ et $0,2 + 0,5 + 0,3 = 1 : Q$ est bien un état stable. (1)
- d) Oui : tous les coefficients de T sont strictement positifs, la chaîne admet un unique état stable et (P_n) converge vers Q quelle que soit P_0 ; les valeurs 0,42 puis 0,468 confirment la progression vers 0,5. (1)

À retenir — Vérifier qu'une distribution est stable est un simple produit à effectuer ; la trouver demande, elle, de résoudre le système complété par la somme égale à 1.

Exercice 5 – Convergence et raison négative

(4 pts)

- a) $P = (p \quad 1 - p) : 0,3p + 0,9(1 - p) = p$, soit $0,9 - 0,6p = p$, puis $1,6p = 0,9$ et $p = 0,5625$. L'état stable est $(0,5625 \quad 0,4375)$. (1)
- b) Ligne 1 : $0,3 \times 0,3 + 0,7 \times 0,9 = 0,72$ et $0,3 \times 0,7 + 0,7 \times 0,1 = 0,28$; ligne 2 : $0,9 \times 0,3 + 0,1 \times 0,9 = 0,36$ et $0,9 \times 0,7 + 0,1 \times 0,1 = 0,64$. Donc $T^2 = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,36 & 0,64 \end{pmatrix}$. (1)
- c) $p_{n+1} = 0,3p_n + 0,9(1 - p_n) = -0,6p_n + 0,9$; avec $u_n = p_n - 0,5625$, $u_{n+1} = -0,6u_n$ et $u_0 = 0,4375$, donc $p_n = 0,5625 + 0,4375 \times (-0,6)^n$ et $p_3 = 0,5625 - 0,4375 \times 0,216 = 0,468$. (1)
- d) L'alternance vient de la raison négative $-0,6$: la suite auxiliaire change de signe à chaque étape. Mais $|-0,6| < 1$, donc $(-0,6)^n \rightarrow 0$ et $p_n \rightarrow 0,5625$: la suite converge en oscillant autour de sa limite. De plus, tous les coefficients de T sont strictement positifs, ce qui garantit la convergence. (1)

Attention — Une suite qui oscille n'est pas une suite divergente : seule la condition $|q| < 1$ sur la raison décide de la convergence.